Nichtlineare Optimierung II - Restringierte Optimierung

1. Übung

Wintersemester 2011/2012

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Angewandte Mathematik / Optimierung und Approximation
Prof. Dr. Kathrin Klamroth, Dipl. Math. Markus Kaiser

Besprechung des Übungsblattes: 18.04.2012, 14-16 Uhr, D 13.15

Aufgabe 1: *(Modellierung)*
Ein Abfallbeseitigungsabkommen welches der Stadt Dirttown erlaubte, den in ihr erzeugten Müll auf die Deponien einer Nachbarstadt zu bringen, ist leider ausgelaufen. Nun müssen auf dem Stadtgebiet von Dirttown neue Mülldeponien eröffnet werden.
Im rechteckigen Stadtgebiet mit Eckpunkten $e^1, e^2, e^3, e^4 \in \mathbb{R}^2$ wurden Punkte $a^1, \ldots, a^N \in \mathbb{R}^2$ ermittelt, die von den Deponien möglichst unbeeinträchtigt sein sollten (Sehenswürdigkeiten, Wohngebiete, usw.). Zudem ist es den Planern unterschiedlich wichtig, wie stark die einzelnen a^i berücksichtigt werden. Dies wird in numerischen Faktoren $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ ausgedrückt.
Die Beeinträchtigung durch eine Deponie nimmt mit der Entfernung ab und lässt sich durch $g(x) := \frac{m_i}{(d(x,x^i))^2}$ für die $i-$te Deponie beschreiben. Dabei ist m_i die Kapazität von Deponie i und $d(x, x^i)$ die Entfernung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^2$ zu einer in $x^i \in \mathbb{R}^2$ platzierten Deponie.
Um bis auf weiteres den produzierten Müll aufnehmen zu können, sollen Deponien mit einer Gesamtkapazität von M eröffnet werden. Außerdem sollen die Deponien einen Mindestabstand D voneinander haben, um die Infrastruktur gleichmäßiger zu belasten.

(a) Formulieren Sie ein restringiertes Optimierungsmodell, das die Platzierung der Deponien gemäß den gewünschten Kriterien beschreibt.

(b) Formen Sie das Problem für eine feste Anzahl von Deponien so um, dass man es mit Methoden der unrestringierten Optimierung lösen kann.

Aufgabe 2: *(Eigenvektoren und Konjugiertheit)*
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und seien $d^1, \ldots, d^n$ Eigenvektoren von A. Zeigen Sie, dass $d^1, \ldots, d^n$ A-konjugiert sind. Falls Sie dabei Resultate aus der linearen Algebra benötigen, zeigen Sie diese ebenfalls.
Hinweis: A-Konjugiertheit lässt sich völlig analog zu Definition 10.3. auch für nicht positiv definite Matrizen definieren.

Aufgabe 3: *("CG"-Verfahren ohne Gradientenberechnung)*
Wir betrachten die Zielfunktion $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx - b^\top x$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit einer positiv definiten und symmetrischen Matrix Q. Seien x^1 und x^2, mit $x^1 \neq x^2$, Minimalstellen von f auf affin linearen Unterräumen M_1 bzw. M_2 jeweils parallel zu linearen Unterrämen S_1 bzw. S_2. D.h. $M_i = y^i + S_i,\ y^i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ i = 1, 2.$
Außerdem seien M_1 und M_2 so gewählt, dass oBdA $f(x^1) < f(x^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass für $x^1 \neq x^2$ die Differenz $x^1 - x^2$ Q-konjugiert zu allen Vektoren im Schnitt von S_1 und S_2 ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Richtungsableitungen der Zielfunktion in x^1 bzw. x^2 in Richtungen, die in $S_1 \cap S_2$ liegen. Dabei seien v^k, $k \in K \subseteq \{1, \ldots, n\}$ linear unabhängige Vektoren, die $S_1 \cap S_2$ aufspannen.

(b) Verwenden Sie die in (a) gezeigte Eigenschaft, um ein Verfahren mit konjugierten Richtungen zu formulieren, das ohne die Berechnung von Gradienten auskommt und bei dem "nur" auf linearen Unterräumen minimiert werden muss.
Hinweis: Es ist ausreichend, das Verfahren mit einem Richtungsvektor $d^1 \in \mathbb{R}^n$ und zwei beliebigen Punkten $y^1, z^1 \in \mathbb{R}^n$ (mit $y^1 \neq z^1$ und $y^1 \neq td^1 \neq z^1$, $t \in \mathbb{R}$) zu initiieren. (M_1 und M_2 können ja durchaus parallel sein.) Wie erhält man nun eine zu d^1 konjugierte Richtung? Wie lässt sich dieses Vorgehen auf weitere Iterationen verallgemeinern?

Bitte beachten Sie für die Programmieraufgabe: Senden Sie Ihr lauffähiges Programm bis spätesten 18 Uhr am 24.04.2012 an `kaiser@math.uni-wuppertal.de`. Die Programmieraufgaben dürfen in Zweiergruppen abgegeben werden. Achten Sie bitte darauf, genau die angegebenen Ein- und Ausgabeparameter zu verwenden und ersetzen Sie im Funktionsnamen "NACHNAME" durch Ihre(n) Nachnamen.

Bitte wenden.

Aufgabe 4: *(CG-Verfahren für lineare Gleichungssysteme)*
Implementieren Sie in Matlab eine Funktion

```
function [xopt] = NACHNAME_cg(A,b,x0,eps)
```

für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Spaltenvektoren $b, x0 \in \mathbb{R}^n$ und eine reelle Zahl $eps > 0$.
Diese Funktion soll das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des CG-Verfahrens zum Lösen von linearen Gleichungssystemen ausgehend vom Startpunkt $x0$ bis zu einer Genauigkeit von $\|g^k\| < eps$ lösen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
Ihr Algorithmus sollte zunächst überprüfen, ob die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist. Falls A diese Bedingungen erfüllt, wird das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des CG-Verfahrens gelöst.
Ist A nicht symmetrisch oder nicht positiv definit, so kann für reguläre Matrizen A das Hilfsproblem $A^\top Ax = A^\top b$ mit dem CG-Verfahren gelöst werden. (Die Lösungen der beiden Probleme sind identisch.)
Ist A singulär, soll dem Benutzer eine Fehlermeldung auf dem Bildschirm ausgegeben werden.
Sie finden Beispiele zum Testen ihrer Funktion auf der Vorlesungshomepage.

Bemerkung: Aktuelle Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen finden Sie im Internet unter:

http://www2.math.uni-wuppertal.de/opt/NLO/