Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften -

Arbeitsgruppe Optimierung und Approximation

Eine Einführung in die Spieltheorie

- Theorie und Numerik strategischer Spiele -

Vorlesungsskript SS 2009

von

Prof. Dr. Manfred Mendel

Kommentar: Das Skript wird parallel zur Vorlesung erstellt. Geplant sind sechs Kapitel. Stand 14. 07. 2009: Kapitel 1 bis 5.

Vorwort

Die Spieltheorie als mathematische Disziplin wurde im ersten Drittel des letzten Jahrhunderts von John von Neumann begründet. Seit dem wegweisenden Buch von v. Neumann und Morgenstern aus dem Jahr 1944 „Theorie of Games and Economic Behaviour“ hat sie insbesondere Eingang gefunden in den weitverzweigten Bereich der Ökonomie. Heute finden spieltheoretische Modelle aber nicht nur Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften, sondern auch in der Biologie, der Politik und den Gesellschaftswissenschaften. Spezielle Gesellschaftspiele, beispielsweise das Schachspiel, können in spieltheoretischen Modellen dargestellt und analysiert werden. Neben den genannten Wissenschaftlern haben in besonderem Maße die Mathematiker John F. Nash, Reinhard Selten und John Harsanyi zur Weiterentwicklung der Spieltheorie beigetragen. Für ihre herausragenden Arbeiten auf diesem Gebiet haben sie im Jahr 1994 gemeinsam den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten.

Die Spieltheorie stellt das formale Intrumentarium zur Analyse von Konflikten und Kooperationen bereit. Ausgangspunkt ist dabei die Formulierung eines spieltheoretischen Problems als mathematisches Modell. Dabei geht es um die mathematische Formulierung strategischer Entscheidungssituationen, in denen

a) das Ergebnis der Entscheidungen von mehreren Entscheidungsträgern (Spieler oder Akteure genannt) abhängt, so dass ein einzelner das Ergebnis nicht unabhängig von der Wahl der anderen bestimmen kann,

b) jeder der Entscheidungsträger sich dieser Interdependenz bewußt ist;

c) jeder Entscheidungsträger davon ausgeht, dass alle anderen sich ebenfalls dieser Interdependenz bewußt sind;

d) jeder bei seinen Entscheidungen a), b), c) berücksichtigt.

Auf Grund dieser Eigenschaften sind Interessenskonflikte oder Koordinationsprobleme charakteristische Eigenschaften von strategischen Entscheidungssituationen. Viele ökonomische Fragestellungen weisen die hier aufgeführten Eigenschaften auf. Deshalb wird heute von vielen Ökonomen die Spieltheorie als die formale Sprache der ökonomischen Theorie betrachtet. Inzwischen gibt es kaum einen Bereich der Mikroökonomie, in dem die Spieltheorie nicht angewendet wird.

Die vorangehenden Ausführungen machen deutlich, dass die Spieltheorie ein weites Feld mit einer umfassenden mathematischen Theorie, mit zahlreichen numerischen Lösungsverfahren wie auch mit vielfältigen Anwendungsbereichen darstellt. All dem kann eine „Einführung in die Spieltheorie“ natürlich nur in begrenztem

Umfang gerecht werden. Eine grobe Zielsetzung bei der Erstellung des Skripts besteht darin, in einige grundlegende Problemstellungen der Spieltheorie (endliche Spiele, insbesondere Zwei-Personenspiele, kooperative Spiele, extensive Spiele) einzuführen und eine Verbindung zu anderen mathematischen Theorien (z.B. zur Optimierung) herzustellen, die Methoden für die Analyse und die Konstuktion von Lösungsverfahren liefern.

Die Spieltheorie stellt für den Verfasser des Skripts in weiten Bereichen Neuland dar. Es gibt aber zahlreiche gute Skripte und Lehrbücher, die bei der Ausarbeitung einer Vorlesung eine nützliche Hilfestellung bieten. Bereits im Vorwort soll darauf hingewiesen werden, dass sich der Verfasser auf einige Arbeiten in besonderem Maße stützt; diese sind:

[1] Christian Kanzow: Einführung in die Spieltheorie. Vorlesungsskript Universität Würzburg, WS 2006/07.
[2] Christian Kanzow: Optimierungsverfahren zur Lösung linearer Komplementaritätsprobleme. Vorlesungsskript Universität Hamburg.
[3] Walter Schlee: Einführung in die Spieltheorie. Vieweg 2004.
[4] Berninghaus, Ehrhart, Güth: Strategische Spiele. Springer 2006.
[5] C.Geiger, C.Kanzow: Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben. Springer 2001.

Weitere Literatur, die bei der Erstellung des Skripts eine Rolle gespielt hat, wird im Anhang aufgeführt. Der Inhalt der Vorlesung ist von persönlichen Vorlieben geprägt. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, Querverbindungen zur Optimierung, zu linearen Komplementaritätsproblemen und Variationsungleichungen herzustellen, um Lösungsverfahren, die für diese Probleme bekannt sind, für die Spieltheorie nutzbar zu machen. Das Skript wird kapitelweise parallel zur Vorlesung erstellt.

Wuppertal, im April 2009

Manfred Mendel

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in strategische Spiele **5**
- 1.1 Strategische Spiele und Nash-Gleichgewicht . . . 5
- 1.2 Erläuterung mit Beispielen . . . 7
- 1.3 Strategische Äquivalenz . . . 11
- 1.4 Andere Lösungskonzepte . . . 15
- 1.5 Klassifikation strategischer Spiele . . . 18

2 Existenz von Nash-Gleichgewichten **21**
- 2.1 Die Abbildung der Bestantwort . . . 21
- 2.2 Gemischte Erweiterung . . . 23
- 2.3 Ein Existenzsatz von Nikaido-Isoda . . . 25

3 Endliche Spiele **29**
- 3.1 Grundlegende Eigenschaften . . . 29
- 3.2 Zweipersonen-Nullsummen-Spiele . . . 32
- 3.3 Matrixspiele in gemischten Strategien . . . 35
- 3.4 Bi-Matrixspiele und quadratische Programme . . . 38
- 3.5 Bi-Matrixspiele und Lineare Komplementaritätsprobleme (LCP) . . . 42
  - 3.5.1 Einführung in LCP . . . 43
  - 3.5.2 Bi-Matrixspiele als LCP . . . 44
  - 3.5.3 Ein modifiziertes Lemke-Verfahren . . . 49
- 3.6 Weitere Beispiele . . . 55

4 Variationsungleichungen (VIP) **59**
- 4.1 VIP und Nash-Gleichgewichte . . . 59
- 4.2 Monotone Funktionen . . . 64
- 4.3 Projektionen auf konvexe Mengen . . . 68
- 4.4 Existenz von Nash-Gleichgewichten via VIP . . . 70
- 4.5 Numerische Verfahren . . . 75
  - 4.5.1 Diagonalisierungsverfahren . . . 75

4.5.2 Fixpunkt- oder Projektionsverfahren 77

5 Spiele in Extensivform **82**
5.1 Definition und Beispiele 82
5.2 Spiele mit perfekter Information 87
5.3 Teilspielperfekte Gleichgewichte 91
5.4 Spiele ohne perfekte Information 94
5.5 Weitere Beispiele 103

Literaturverzeichnis **108**

Kapitel 1

Einführung in strategische Spiele

In diesem Kapitel werden grundlegende Begriffe der Spieltheorie behandelt. Es wird der Begriff des strategischen Spiels definiert und erläutert, es folgt der zentrale Begriff des Nash-Gleichgewichts, der an einigen Beispielen erläutern wird. Schließlich werden grundlegende Eigenschaften strategischer Spiele vorgestellt.

1.1 Strategische Spiele und Nash-Gleichgewicht

Definition 1.1 *Unter einem strategischen Spiel oder Spiel in Normalform Γ (kurz als Spiel bezeichnet) versteht man ein Tripel*

$$\Big(\mathcal{A},\ (X^1,\ldots,X^m),\ (\succeq_1,\ldots,\succeq_m)\Big) \tag{1.1}$$

mit folgender Bedeutung:

1. *$\mathcal{A} := \{1,\ldots,m\}$ ist eine m-elementige Menge; jedes Element $i \in \mathcal{A}$ wird als Akteur oder Spieler bezeichnet.*

2. *Jedem Spieler i ist die Menge X^i zugeordnet; jedes Element $x^i \in X^i$ wird Entscheidung oder Strategie des Spielers i und X^i Strategiemenge des Spielers i genannt. Das m-Tupel $(x^1,\ldots,x^m)$ mit $x^i \in X^i$ (für $i = 1,\ldots,m$) wird eine Strategiekombination der m Spieler genannt. $X := (X^1 \times \ldots, X^m) = \prod_{i=1}^m X^i$ heißt Strategiemenge der m Spieler.*

3. *$\succeq_i$ ist eine Präferenzordnung des Spielers i auf der Menge aller Strategiekombinationen. Die m Präferenzordnungen $\succeq_i$, jeweils definiert auf X, werden zu $\succeq := (\succeq_1,\ldots,\succeq_m)$ zusammengefaßt.*

Die Durchführung eines Spiels besteht darin, dass jeder Spieler eine Strategie x^i aus seiner Menge X^i wählt, ohne die Entscheidung seiner Mitspieler zu kennen.

Die sich ergebende Strategiekombination $x := (x^1, \ldots, x^m)$ beurteilt danach jeder Spieler entsprechend seiner Präferenzordnung.

KOMMENTAR:
Ist die Strategiemenge X der m Spieler endlich, so wird das Spiel $\Gamma = (\mathcal{A},\ X,\ \succeq)$ endlich genannt. Die Strategiemenge X^i des i-ten Spielers wird dann mit $X^i := \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n_i}^i\}$ notiert.
Der Begriff „Präferenzordnung“ auf X bedeutet, dass für je zwei Elemente $x, y \in X$ gilt: $x \succeq_i y$ oder $x \preceq_i y$ und dass die Relation $\succeq_i$ auf X reflexiv und transitiv ist für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$.

In vielen Anwendungen entsteht für den Spieler i bei Eintritt einer Strategiekombination x ein Gewinn oder Nutzen. Dies wird für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ durch eine Funktion

$$u_i : X \mapsto \mathbb{R}$$

zu Ausdruck gebracht. Man erhält so für jeden Spieler i eine Präferenzordnung, indem man für beliebiges $x, y \in X$ festlegt:

$$x \succeq_i y \quad \Longleftrightarrow \quad u_i(x) \geq u_i(y) \tag{1.2}$$

Die Funktion u_i wird dann Auszahlungs- oder Nutzenfunktion des Spielers i genannt.

Definition 1.2 *Unter einem Spiel mit Auszahlung versteht man ein Tripel $\Gamma := (\mathcal{A},\ X,\ U)$, wobei $\mathcal{A}$ und X wie oben definiert sind und $U := (u_1, \ldots, u_m)$ der Vektor der Auszahlungsfunktionen u_i der einzelnen Spieler ist.*

Welche seiner Strategien soll nun ein Spieler wählen? Es ist naheliegend zu verlangen, dass der einzelne Spieler eine Strategie wählen soll, die im Sinne seiner Präferenzen ein möglichst gutes Ergebnis für ihn bringt unter Berücksichtigung der apriori nicht bekannten Entscheidungen seiner Mitspieler. Das zentrale Problem der Spieltheorie ist es, Kriterien hierfür zu entwickeln. Dabei sei bereits an dieser Stelle erwähnt, dass es eine Reihe von verschiedenen Lösungsbegriffen gibt, von denen der bedeutendste sicherlich der des Nash-Gleichgewichts ist. Andere Kriterien werden an späterer Stelle angesprochen.

Definition 1.3 *Gegeben sei ein strategisches Spiel $\Gamma = (\mathcal{A},\ X,\ \succeq)$. Ein Vektor $x^* := (x^{*,1}, \ldots, x^{*,m}) \in X$ heißt ein Nash-Gleichgewicht des Spiels Γ, wenn für* **jeden** *Spieler $i \in \mathcal{A}$ gilt:*

$$x^* \succeq_i \left(x^{*,1}, .., x^{*,i-1}, x^i, x^{*,i+1}, .., x^{*,m}\right) \ \ \forall\ \ x^i \in X^i \tag{1.3}$$

oder (in einem Spiel mit Auszahlung):

$$u_i(x^*) \geq u_i(x^{*,1}, .., x^{*,i-1}, x^i, x^{*,i+1}, .., x^{*,m}) \ \ \forall\ \ x^i \in X^i \tag{1.4}$$

Zur bequemeren Formulierung der Bedingung (1.3) bzw. (1.4) führen wir eine in der Spieltheorie übliche Schreibweise ein: Soll in einem Vektor $x = (x^1, \ldots, x^m)$ die i-te Komponente besonders hervorgehoben oder gekennzeichnet werden, so schreibt man: $x = (x^i, x^{-i})$, d.h. es gilt:

$$(x^i, x^{-i}) := (x^1, .., x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, .., x^m)$$

Auf diese Weise kann man die genannten Bedingungen wie folgt ausdrücken:

$$x^* \succeq_i (x^i, x^{*,-i}) \ \forall \ x^i \in X^i \quad \text{bzw.} \quad u_i(x^*) \geq u_i(x^i, x^{*,-i}) \ \forall \ x^i \in X^i$$

Für ein Spiel $\Gamma = (\mathcal{A},\ X,\ U)$, also ein Spiel mit Auszahlung, kann man ein Nash-Gleichgewicht äquivalent auch auf folgende Weise formulieren, wobei sich der Beweis der Aussage unmittelbar aus der Definition 1.3 ergibt.

Satz 1.1 *Ein Vektor $x^* \in X$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht des Spiels $\Gamma = (\mathcal{A},\ X,\ U)$, wenn für jedes $i \in \mathcal{A}$ die Strategie $x^{*,i}$ des i-ten Spielers ein Maximierer der folgenden Optimierungsaufgabe ist:*

$$\max \ \ u_i(x^i, x^{*,-i}) \quad s.d. \ x^i \in X^i$$

Ein Nash-Gleichgewicht x^* kann also durch folgende Eigenschaft beschrieben werden: Ändert ein Spieler $i \in \{1, \ldots, m\}$ im Nash-Gleichgewichtspunkt seine Strategie $x^{i,*}$ auf x^i ab, wobei die übrigen Spieler die Strategiekombination $x^{*,-i}$ beibehalten, so kann er durch diese Änderung keine Verbesserung herbeiführen, und dies gilt für jeden Spieler i.
Man beachte, dass Satz 1.1 keine Methode liefert, durch Lösung von Optimierungsaufgaben das Nash-Gleichgeweicht eines Spiels zu ermitteln, weil für die Durchführung der Optimierung x^* apriori bekannt sein müßte.

1.2 Erläuterung mit Beispielen

Wir illustrieren den Begriff des strategischen Spiels und den des Nash-Gleichgewichts an einigen Beispielen.

Beispiel 1.1 *Frederic und Nicole haben beim letzten Treffen nichts Genaues ausgemacht, wo sie sich das nächste Mal treffen wollen. Frederic geht gerne zum Fußball (F), Nicole gerne ins Kino (K). Frederic denkt bei sich: sie wird mir zuliebe zum Fußball gehen, und ähnlich denkt Nicole, dass er ihr zuliebe ins Kino gehen wird. Beiden liegt aber sehr viel daran sich zu treffen.*
Die Situation läßt sich als Spiel mit den Spielern „Frederic“ (1) und „Nicole“ (2) und den Strategiemengen $X^1 = X^2 = \{F, K\}$ interpretieren. Auf den vier

Strategiekombinationen (F,F), (K,K), (F,K), (K,F) definieren wir für jeden der beiden Spieler eine Präferenzordnung. Dabei bezeichnet die erste Komponente die Strategie von Frederic, die zweite die Strategie von Nicole. Frederic („Er“) könnte folgende Präferenzordnung haben:

$$(K,F) \preceq_{Er} (F,K) \preceq_{Er} (K,K) \preceq_{Er} (F,F)$$

Für Nicole erscheint die folgende Präferenzordnung plausibel:

$$(K,F) \preceq_{Sie} (F,K) \preceq_{Sie} (F,F) \preceq_{Sie} (K,K)$$

Es gibt hier zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich: (F,F) und (K,K).
Man kann die beiden Präferenzordnungen auch durch Nutzenfunktionen u_1 (für „ihn“) und u_2 (für „sie“) zum Ausdruck bringen:

$$u_1(K,F) = 0\ ,\ u_1(F,K) = 1\ ,\ u_1(K,K) = 2\ ,\ u_1(F,F) = 3$$
$$u_2(K,F) = 0\ ,\ u_2(F,K) = 1\ ,\ u_2(F,F) = 2\ ,\ u_2(K,K) = 3$$

Bei einem Spiel mit 2 Akteuren ist es üblich, die beiden Nutzenfunktionen durch so genannte Auszahlungsmatrizen darzustellen. Dabei ist $X^1 = \{x_1^1, x_2^1\} = \{F,K\}$ bzw. $X^2 = \{x_1^2, x_2^2\} = \{F,K\}$ zu beachten:

$$A_{Er} = \left(u_1(x_i^1, x_j^2)\right)_{i,j=1.2} \quad \textit{bzw.} \quad A_{Sie} = \left(u_2(x_i^1, x_j^2)\right)_{i,j=1,2}$$

$A_{Er} =$

	F	K
F	*3*	*1*
K	*0*	*2*

$A_{Sie} =$

	F	K
F	*2*	*1*
K	*0*	*3*

Übungshalber verifizieren wir die Aussage von Satz 1.1 für das Nash-Gleichgewicht $(x^{*,1}, x^{*,2}) = (K,K)$; es gilt offenbar:

$$\begin{aligned} u_1(K,K) &= \max\ u_1(x^1,K) \quad s.d.\ x^1 \in \{K,F\} \\ u_2(K,K) &= \max\ u_2(K,x^2) \quad s.d.\ x^2 \in \{K,F\} \end{aligned}$$

Entsprechendes läßt sich für das Nash-Gleichgewicht (F,F) zeigen.

Das folgende Beispiel wird in der Literatur in verschiedenen Varianten behandelt, es ist unter der Bezeichnung „Gefangenendilemma“ bekannt.

Beispiel 1.2 *Nach einem Raubüberfall werden zwei Personen 1 und 2 festgenommen, da sie unter dringendem Tatverdacht stehen. Die Polizei trennt die beiden Personen, damit zwischen ihnen keine Absprachen möglich sind, und macht beiden unabhängig voneinander den folgenden Vorschlag:*

- *Wenn einer sich schuldig bekennt und der andere nicht, so erhält der Geständige 1 Jahr Gefängnis aufgrund einer Kronzeugenregelung, während der andere (Nichtgeständige) 10 Jahre Gefängnis bekommt.*
- *Wenn beide gestehen, bekommt jeder 5 Jahre Gefängnis.*
- *Wenn keiner gesteht, bekommt jeder 2 Jahre Gefängnis wegen illegalen Waffenbesitzes.*

Hierbei handelt es sich um ein Spiel mit zwei Spielern $\{1,2\}$ *und den Strategiemengen*

$$X^1 = X^2 := \{S, G\} \quad \textit{mit } S := \textit{schweigen}, \; G := \textit{gestehen}$$

Die Jahre im Gefängnis sind als Strafe anzusehen, so dass sie in den Auszahlungsfunktionen mit einem negativen Vorzeichen versehen werden:

$$u_1(S,G) = -10 \; , \; u_1(G,G) = -5 \; , \; u_1(S,S) = -2 \; , \; u_1(G,S) = -1$$
$$u_2(G,S) = -10 \; , \; u_2(G,G) = -5 \; , \; u_2(S,S) = -2 \; , \; u_2(S,G) = -1$$

Man überzeugt sich leich davon, dass die Strategiekombination (G,G) *mit 5 Jahren Gefängnis das einzige Nash-Gleichgewicht ist, denn es gilt:*

$$u_1(G,G) = \max\{u_1(x_i^1, G) \,|\, i = 1,2\,\} \quad u_2(G,G) = \max\{u_2(G, x_i^2) \,|\, i = 1,2\,\}$$

Hätten beide Personen geschwiegen, wären sie mit 2 Jahren davongekommen. Weshalb kann man die Strategiekombination (G,G) *dennoch als eine „gute Wahl" bezeichnen? Da Spieler 1 nicht weiß, welche Entscheidung Spieler 2 trifft, muss er abwägen und auch den für ihn schlimmeren Fall einbeziehen, dass Spieler 2 gesteht. Würde er in diesem Fall schweigen, würde er eine Strafe von 10 Jahren erhalten. Also ist es besser, wenn er gesteht, im schlimmsten Fall bekommt er dann 5 Jahre, im günstigeren Fall sogar nur ein Jahr. Analog stellt sich die Situation für den Spieler 2 dar.*
Übungshalber geben wir die Auszahlungsmatrizen für die beiden Spieler an, wobei $X^1 = \{x_1^1, x_2^1\} = \{S, G\}$ *bzw.* $X^2 = \{x_1^2, x_2^2\} = \{S, G\}$ *gilt:*

$\left(u_1(x_i^1, x_j^2)\right)_{i,j=1.2} =$

	S	G
S	-2	-10
G	-1	-5

$\left(u_2(x_i^1, x_j^2)\right)_{i,j=1,2} =$

	S	G
S	-2	-1
G	-10	-5

Häufig werden die beiden Auszahlungsmatrizen in einem Schema zusammengefaßt, indem man die Stelle (i,j) *der Matrix mit dem Zahlenpaar*

$(u_1(x_i^1, x_j^2), (u_2(x_i^1, x_j^2))$ *besetzt:*

		Spieler 2	
		S	G
Spieler 1	S	*-2,-2*	*-10,-1*
	G	*-1,-10*	*-5,-5*

Im folgenden Spiel „Stein, Schere, Papier“ ist der Gewinn des einen Spielers gleich dem Verlust des anderen. Wir werden solche Spiele später Nullsummenspiele nennen.

Beispiel 1.3 *Gegeben seien zwei Spieler, die unabhängig voneinander Stein (St), Schere (S) oder Papier (P) wählen. Die Strategiemengen beider Spieler sind also gegeben durch*

$$X^1 := X^2 := \{St,\ S,\ P\}$$

Es gelten die bekannten Regeln: Papier hüllt den Stein, der Stein macht die Schere stumpf, die Schere schneidet Papier. Man kann es auch so ausdrücken:

Papier schlägt Stein, Stein schlägt Schere, Schere schlägt Papier.

Gewinnt Spieler 1, so erhält er 1 Euro von Spieler 2, verliert er, so zahlt er 1 Euro an ihn. In Patt-Situation erfolgt keine Zahlung. Wie im vorangehenden Beispiel werden die Auszahlungsmatrizen (für beide Spieler) in einem Schema angegeben, das die Präferenzordnung für jeden Spieler festlegt:

		Spieler 2		
		Stein	*Schere*	*Papier*
Spieler 1	*Stein*	*0 , 0*	*1 ,-1*	*-1 , 1*
	Schere	*-1 , 1*	*0 , 0*	*1 ,-1*
	Papier	*1 ,-1*	*-1 , 1*	*0 , 0*

Wir begründen, dass kein Nash-Gleichgewicht für dieses Spiel existiert. So kann (St,St) kein Nash-Gleichgewicht sein, weil gilt:

$$u_1(St, St) = 0 < \max\{u_1(x^1, St) \,|\, x^1 \in \{St, S, P\}\} = 1$$

Ebenso kann (St,S) kein Nash-Gleichgewicht sein, denn es gilt:

$$u_2(St, S) = -1 < \max\{u_2(St, x^2) \,|\, x^2 \in \{St, S, P\}\} = 1$$

Ganz analog sieht die Begründung für jede der übrigen Strategiekombinationen aus, dass sie als Nash-Gleichgewicht nicht in Frage kommt.

1.3 Strategische Äquivalenz

Der Begriff der „strategischen Äquivalenz“ gestattet es, Spiele auf typische Formen zurückzuführen, und diese zu untersuchen.

Definition 1.4 *Gegeben seien zwei Spiele*

$$\Gamma_1 = \Big(\mathcal{A},\ (X^1,\ldots,X^m),\ (\succeq_{1,1},\ldots,\succeq_{1,m})\Big)$$
$$\textit{und} \qquad \Gamma_2 = \Big(\mathcal{A},\ (X^1,\ldots,X^m),\ (\succeq_{2,1},\ldots,\succeq_{2,m})\Big)$$

die sich nur durch ihre Präferenzordnungen unterscheiden. Sie heißen strategisch äquivalent, wenn die Menge der Nash-Gleichgewichte identisch ist.

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass der Begriff „strategische Äquivalenz“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der strategischen Spiele erzeugt.
Dass bei den Beispielen, die im vorangehenden Abschnitt betrachtet worden sind, untereinander keine strategische Äquivalenz vorliegen kann, ergibt sich allein schon aus der verschiedenen Anzahl der Nash-Gleichgewichte.
Wir führen nun einen Begriff ein, der an sich von Interesse ist, mit dessen Hilfe aber auch eine einfache hinreichende Bedingung für strategische Äquivalenz angegeben werden kann.

Wir betrachten einen Spieler i und eine gegebene Strategiekombination $\widetilde{x}^{-i}$ der übrigen Mitspieler. Unter der Bedingung, dass die Mitspieler diese Strategiekombination beibehalten, wird i die Strategie $\widetilde{x}^{\,i}$ einer anderen Strategie x^i vorziehen, wenn gilt: $(\widetilde{x}^{\,i},\widetilde{x}^{-i}) \succeq_i (x^i,\widetilde{x}^{-i})$.

Definition 1.5 *Gegeben sei eine Präferenzordnung $\succeq_i$ des Spielers i auf der Menge der Strategiekompinationen X aller Spieler. Dann wird für i eine Präferenzordnung $\succeq_{i\,|\,\widetilde{x}^{-i}}$ unter der Bedingung $\widetilde{x}^{-i}$ auf der Menge der Strategien X^i des Spielers i definiert durch*

$$\widetilde{x}^{\,i} \succeq_{i\,|\,\widetilde{x}^{-i}} x^i \quad :\Longleftrightarrow \quad (\widetilde{x}^{\,i},\widetilde{x}^{-i}) \succeq_i (x^i,\widetilde{x}^{-i})$$

Lemma 1.1 *Gegeben seien zwei Spiele Γ_1 und Γ_2 in der Notation von Definition 1.4. Sind alle bedingten Präferenzordnungen von Γ_1 und Γ_2 identisch, dann sind die beiden Spiele strategisch äquivalent.*

Beweis: Sei x^* ein Nash-Gleichgewicht von Γ_1. Dann gilt nach Definition des Nash-Gleichgewichts:

$$x^* \succeq_{i,1} (x^i, x^{*,-i}) \quad \forall\, x^i \in X^i\ ,\ \forall\, i \in \mathcal{A}$$

Nach Definition der bedingten Präferenzordnung ist dies für jedes i äquivalent zu

$$x^{*,i} \succeq_{i,1\,|\,x^{*,-i}} x^i \quad \forall\, x^i \in X^i$$

Da die bedingten Präferenzordnungen identisch sind, folgt weiter für jedes i:

$$x^{*,i} \succeq_{i,2\,|\,x^{*,-i}} x^i \quad \forall\, x^i \in X^i$$

Daraus folgt nun:

$$x^* \succeq_{i,2} (x^i, x^{*,-i}) \quad \forall\, x^i \in X^i\ ,\ \forall\, i \in \mathcal{A}$$

Somit ist x^* ein Nash-Gleichgewicht bezüglich Γ_2. Da man in obiger Begründung die Rollen von Γ_1 und Γ_2 vertauschen kann, folgt die Behauptung. □

Satz 1.2 *Gegeben seien zwei Spiele mit Auszahlungen* $\Gamma_1 := (\mathcal{A}, X, U)$ *und* $\Gamma_2 := \left(\mathcal{A}, X, \widetilde{U}\right)$ *mit der gleichen Anzahl von Spielern und den gleichen Strategiemengen. Es gebe Zahlen* $k_i > 0$ *und Funktionen* $c_i : X^{-i} \mapsto \mathbb{R}$*, so dass für jedes* $i \in \mathcal{A}$ *gilt:*

$$\widetilde{u}_i(x) = k_i\, u_i(x) + c_i(x^{-i}) \quad \forall\, x \in X \tag{1.5}$$

Dann sind die Spiele Γ_1 *und* Γ_2 *strategisch äquivalent.*

Beweis: Im vorliegenden Fall ist die Präferenzordnung durch die Auszahlungsfunktionen U bzw. $\widetilde{U}$ definiert. Für $i \in \mathcal{A}$ gilt $\widetilde{x}^{\,i} \succeq_{i\,|\,\widetilde{x}^{-i}} x^i$ genau dann, wenn $u_i(\widetilde{x}) \geq u_i(x^i, \widetilde{x}^{\,-i})$ ist. Diese Ungleichung ist aber äquivalent zu:

$$k_i\, u_i(\widetilde{x}) + c_i(\widetilde{x}^{\,-i}) \geq k_i\, u_i(x^i, \widetilde{x}^{\,-i}) + c_i(\widetilde{x}^{\,-i})$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit $\widetilde{u}_i(\widetilde{x}) \geq \widetilde{u}_i(x^i, \widetilde{x}^{\,-i})$, woraus unmittelbar die Behauptung folgt. □

Eine Erläuterung des Satzes erfolgt für den einfachen Fall eines Spiels mit zwei Spielern, deren Strategiemenge jeweils zwei Elemente enthält. Die Formel (1.5) wird für Spieler 1 durch folgende Beziehungen wiedergegeben:

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}_1(x_1^1, x_1^2) &= k_1\, u_1(x_1^1, x_1^2) + c_1(x_1^2) \\
\widetilde{u}_1(x_1^1, x_2^2) &= k_1\, u_1(x_1^1, x_2^2) + c_1(x_2^2) \\
\widetilde{u}_1(x_2^1, x_1^2) &= k_1\, u_1(x_2^1, x_1^2) + c_1(x_1^2) \\
\widetilde{u}_1(x_2^1, x_2^2) &= k_1\, u_1(x_2^1, x_2^2) + c_1(x_2^2)
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man in folgendem Rechenschema durchführen; die nachfolgende Auszahlungsmatrix für Spieler 1 multipliziert man mit k_1 und addiert zu den beiden Zeilen den Vektor $(c_1(x_1^2)\,,\, c_1(x_2^2))$:

$$k_1 \cdot \rightarrow \quad \begin{array}{|c|cc|} \hline & x_1^2 & x_2^2 \\ \hline x_1^1 & u_1(x_1^1, x_1^2) & u_1(x_1^1, x_2^2) \\ x_2^1 & u_1(x_2^1, x_1^2) & u_1(x_2^1, x_2^2) \\ \hline \uparrow\ + & c_1(x_1^2) & c_1(x_2^2)) \\ \hline \end{array}$$

Die entsprechenden Gleichungen für den Spieler 2 ergeben folgendes Schema:

$$k_2 \cdot \rightarrow \quad \begin{array}{|c|cc|} \hline & x_1^2 & x_2^2 \\ \hline x_1^1 & u_1(x_1^1, x_1^2) & u_1(x_1^1, x_2^2) \\ x_2^1 & u_1(x_2^1, x_1^2) & u_1(x_2^1, x_2^2) \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{c} c_2(x_1^1) \\ c_2(x_2^1) \end{array}$$

Beispiel 1.4 *Betrachtet wird das Beispiel 1.2 (Gefangenendilemma). Die Auszahlungen der beiden Spieler sind in folgender „Matrix“ zusammengefaßt:*

		Spieler 2	
		S	*G*
Spieler 1	*S*	*-2,-2*	*-10,-1*
	G	*-1,-10*	*-5,-5*

Die Matrix wird in folgender Weise abgeändert: Es wird $k_1 = k_2 = 1$ gewählt, für Spieler 1 wird der Zeilenvektor $(1\,,\,10)$ hinzuaddiert, für Spieler 2 der Spaltenvektor $(1\,,\,10)^T$. Die „äquivalenten“ Auszahlungen $\left(\widetilde{u}(x_i^1, u_j^2)\right)$ werden dann durch folgende Matrix wiedergegeben:

		Spieler 2	
		S	*G*
Spieler 1	*S*	*-1,-1*	*0,0*
	G	*0,0*	*5,5*

Daraus läßt sich „leicht“ ablesen, dass (G, G) ein Nash-Gleichgewicht ist.

Im Folgenden wird der Begriff der „strategischen Äquivalenz“ auf einige spezielle Spiele angewandt.

Definition 1.6 *Ein Konstantensummen-Spiel ist ein Spiel $\Gamma := (\mathcal{A}, X, U)$, so dass für jede Spielstrategie $x \in X$ die Auszahlungssumme $\sum_{i\in\mathcal{A}} u_i(x) = C$ ist für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Ist $C = 0$, so heißt das Spiel Nullsummen-Spiel.*

Das Spiel „Stein-Schere-Papier“(Beispiel 1.3), dessen Auszahlungsmatrix wir nochmals angeben, ist ein Nullsummen-Spiel:

		Spieler 2		
		Stein	Schere	Papier
Spieler 1	Stein	0 , 0	1 ,-1	-1 , 1
	Schere	-1 , 1	0 , 0	1 ,-1
	Papier	1 ,-1	-1 , 1	0 , 0

Satz 1.3 *Jedes Konstantensummen-Spiel ist einem Nullsummen-Spiel strategisch äquivalent.*

Beweis: Wir wenden Satz 1.2 an, in dem wir speziell für jedes x setzen:

$$\widetilde{u}_1(x) = u_1(x) + c_1 \ , \quad \widetilde{u}_i(x) = u_i(x) \ \forall \ i = 2, \ldots, m$$

Mit $c_1 = -C$ folgt dann: $\sum_{i \in \mathcal{A}} \widetilde{u}_i(x) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(x) + c_1 = 0$. □

Definition 1.7 *Ein Spiel mit 2 Spielern („Zweipersonen-Spiel“) heißt stark kämpferisch, wenn für je zwei Strategiekombinationen $x, x' \in X$ gilt:*

$$x \succeq_1 x' \quad \Longleftrightarrow \quad x' \succeq_2 x \tag{1.6}$$

Beispiel 1.5 *Ein einfaches Beispiel eines stark kämpferischen Spiels ist durch*

		Spieler 2	
		x_1^2	x_2^2
Spieler 1	x_1^1	*-10, 5*	*2,-2*
	x_2^1	*1,-1*	*-1,1*

gegeben; denn die Auszahlungsmatrizen implizieren folgende Präferenzordnungen:

$$\begin{array}{llll} (x_1^1, x_1^2) & \preceq_1 (x_2^1, x_2^2) & \preceq_1 (x_2^1, x_1^2) & \preceq_1 (x_1^1, x_2^2) \\ (x_1^1, x_2^2) & \preceq_2 (x_2^1, x_1^2) & \preceq_2 (x_2^1, x_2^2) & \preceq_2 (x_1^1, x_1^2) \end{array}$$

Daraus folgt die Gültigkeit von (1.6). □

Man macht sich leicht klar, dass ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel stark kämpferisch ist. Der nachfolgende Satz zeigt, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 1.4 *Ein stark kämpferisches Zweipersonen-Spiel mit Auszahlung ist einem Nullsummen-Spiel strategisch äquivalent.*

BEWEIS: Das Zweipersonen-Spiel sei gegeben durch $\Gamma := (\{1,2\}, (X^1, X^2), (u_1, u_2))$. Wir definieren ein zweites Spiel $\widetilde{\Gamma} := (\{1,2\}, (X^1, X^2), (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2))$, indem wir die Auszahlungsfunktionen auf $X := X^1 \times X^2$ wie folgt festlegen:

$$\widetilde{u}_1(x) := u_1(x)\,, \quad \widetilde{u}_2(x) := -u_1(x) \quad \forall\, x \in X$$

Wegen $\widetilde{u}_1(x) + \widetilde{u}_2(x) = 0 \;\forall\, x \in X$ ist $\widetilde{\Gamma}$ ein Nullsummenspiel. Aus der Definition von Γ als kämpferischem Spiel und aus der Definition von $\widetilde{u}_2$ folgt:

$$\begin{aligned} u_2(x) \geq u_2(x') \quad &\Longleftrightarrow \quad u_1(x) \leq u_1(x') \\ &\Longleftrightarrow \quad -u_1(x) \geq -u_1(x') \\ &\Longleftrightarrow \quad \widetilde{u}_2(x) \geq \widetilde{u}_2(x') \end{aligned}$$

Für ein Element $x^* \in X$ gilt somit $u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x^{*,-i})$, $(\forall x_i \in X_i, i = 1,2)$ genau dann, wenn dies auch für die Funktionen $\widetilde{u}_i$ gilt. Damit ist der Punkt x^* genau dann ein Nash-Gleichgewicht bezüglich Γ, wenn er ein solches bezüglich $\widetilde{\Gamma}$ ist, d.h. Γ ist strategisch äquivalent zu $\widetilde{\Gamma}$. □

1.4 Andere Lösungskonzepte

Mit dem Nash-Gleichgewicht haben wir das zentrale Lösungskonzept der Spieltheorie kennengelernt. In diesem Abschnitt sollen aber noch zwei andere Lösungsansätze angesprochen werden, die wir der Einfachheit halber nur für Spiele mit Auszahlungen, also Spiele der Form $\Gamma := (\mathcal{A},\, X,\, U)$, formulieren.

Definition 1.8 *Gegeben seien zwei Strategien $\bar{x}^i, x^i \in X^i$. Man sagt, die Strategie $\bar{x}^i$ des Spieler i dominiert die Strategie x^i dieses Spielers, wenn für alle Strategiekombinationen x^{-i} der übrigen Mitspieler gilt:*

$$u_i(\bar{x}^i, x^{-i}) \geq u_i(x^i, x^{-i})$$

Dies bedeutet mit anderen Worten: Für den Spieler i ist der Nutzen der Strategie $\bar{x}^i$ mindestens so groß wie der Nutzen der Strategie x^i, und zwar unabhängig davon, welche Strategie x^{-i} die übrigen Mitspieler wählen. Eine Strategie $\bar{x}^i$ heißt dominant für den Spieler i, wenn $\bar{x}^i$ alle seine übrigen Strategien x^i dominiert.

Eine Strategie für Spieler i ist also dominant, wenn sie ihm unter allen für ihn verfügbaren Strategien den größten Nutzen verschafft, und zwar unabhängig davon, welche Strategiekombination die übrigen Mitspieler wählen. Wenn ein Spieler i über eine dominante Strategie verfügt, gibt es für ihn keine strategische Unsicherheit: er wird diese Strategie wählen, unabhängig davon, wie sich die Mitspieler entscheiden.

Definition 1.9 *Ein Vektor $x^* \in X = X^1 \times \ldots \times X^m$ heißt Gleichgewicht in dominanten Strategien, wenn für jeden Spieler $i \in \mathcal{A}$ die Strategie $x^{*,i}$ dominant ist.*

Es ist leicht einzusehen, dass der Begriff des „Gleichgewichts in dominanten Strategien“ ein schärferer Begriff ist als der des Nash-Gleichgewichts. Es gilt folgende Aussage:

Satz 1.5 *Jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien ist ein Nash-Gleichgewicht.*

BEWEIS: Ist x^* ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, so gilt für jeden Spieler i und jede Strategiekombination x^{-i} der übrigen Spieler:

$$u_i(x^{*,i}, x^{-i}) \geq u_i(x^i, x^{-i}) \ \forall\, x^i \in X^i$$

Dies gilt dann insbesondere auch für $x^{-i} := x^{*,-i}$. □

Beispiel 1.6 *Das Gefangenendilemma (Beispiel 1.2) ist ein Spiel mit einem Gleichgewicht in dominanten Strategien, das durch (G,G) gegeben ist. Dies wird besonders deutlich, wenn man das dazu strategisch äquivalente Spiel des Beispiels 1.4 betrachtet.* □

Obwohl das Konzept des „Gleichgewichts in dominanten Strategien“ in der Spieltheorie keine große Rolle spielt, ist der Begriff einer „dominierten“ Strategie in einigen Fällen sinnvoll. Wird x^i von einer Strategie $\bar{x}^i$ strikt dominiert, so kann x^i als i-te Komponente in einem Nash-Gleichgewicht x^* nicht vorkommen. Bei der Suche nach einem Nash-Gleichgewicht kann man (strikt) dominierte Strategien ausschließen, somit das Problem reduzieren.

Beispiel 1.7 *Betrachtet wird ein Spiel mit zwei Spielern 1 und 2. Spieler 1 und 2 habe die Strategiemengen $X^1 := \{U, D\}$ bzw. $X^2 := \{L, M, R\}$. Die Auszahlungsmatrix lautet wie folgt:*

		Spieler 2		
		L	M	R
Spieler 1	U	*1, 0*	*1, 2*	*0, 1*
	D	*0, 3*	*0, 1*	*2, 0*

Man kann ablesen, dass für Spieler 2 die Strategie R durch M dominiert wird (wegen $2 > 1$ und $1 > 0$). Spieler 2 wird (bei rationaler Vorgehensweise) niemals die Strategie R spielen, sie kann also von Spieler 2 gestrichen werden:

		Spieler 2	
		L	M
Spieler 1	U	*1, 0*	*1, 2*
	D	*0, 3*	*0, 1*

Dies bemerkt natürlich Spieler 1 und er erkennt, dass er nun seinerseits Strategie D streichen kann, denn diese wird von U dominiert (wegen $1 > 0$ und $1 > 0$). Wird die zweite Zeile aus dem Schema entfernt, erkennt man, dass (U,M) ein Gleichgewicht (sogar in dominanten) Strategien ist. □

Beispiel 1.8 *Auch in folgendem Beispiel kann ein Nash-Gleichgewicht gefunden werden, indem Strategien, die dominiert werden, bei der Suche nach einer Lösung vernachlässigt werden.*
Zwei Tankstellen liegen an derselben Straße einander gegenüber. Zusammen können sie pro Tag 10000 Liter Benzin verkaufen. Die Tankstellenbesitzer kaufen Benzin für 0,75 Euro pro Liter ein und können es grundsätzlich (jeweils in Cent-Schritten) zu höheren Preisen verkaufen. Verlangt eine Tankstelle mehr als 0,80 Euro, so kann sie kein Benzin mehr verkaufen. Verlangen beide Tankstellen denselben Preis, so teilen sie sich den Markt. Ist eine Tankstelle billiger, so kaufen alle Autofahrer bei dieser Tankstelle (10000 Liter), während die andere Tankstelle nichts verkauft. Eine Peisabsprache findet nicht statt. Die Auszahlungen für beide Tankstellen sind in folgender Tabelle dargestellt:

Preis	*0,80*	*0,79*	*0,78*	*0,77*	*0,76*	*0,75*
0,80	*250 , 250*	*0 , 400*	*0 , 300*	*0 , 200*	*0 , 100*	*0 , 0*
0,79	*400 , 0*	*200 , 200*	*0 , 300*	*0 , 200*	*0 , 100*	*0 , 0*
0,78	*300 , 0*	*300 , 0*	*150 , 150*	*0 , 200*	*0 , 100*	*0 , 0*
0,77	*200 , 0*	*200 , 0*	*200 , 0*	*100 , 100*	*0 , 100*	*0 , 0*
0,76	*100 , 0*	*100 , 0*	*100 , 0*	*100 , 0*	*50 , 50*	*0 , 0*
0,75	*0 , 0*	*0 , 0*	*0 , 0*	*0 , 0*	*0 , 0*	*0 , 0*

Die beiden Tankstellenbesitzer sind die Spieler, ihre Strategien bestehen in der Festsetzung der Preise, also stehen jedem Spieler sechs Strategien zur Verfügung. Die Auszahlungsfunktionen für beide bestehen in der Differenz zwischen Tageseinnahmen und Beschaffungskosten.
Bei rationalem Verhalten wird Spieler 1 (Spaltenspieler) niemals die Strategien 1 oder 6 wählen (0,80 bzw. 0,75), weil diese von Strategie 2 (0,79) dominiert werden. Er kann also seine Strategiemenge um diese beiden Strategien reduzieren. Dasselbe gilt für Spieler 2 (Zeilenspieler), so dass das gegebene Spiel wie folgt reduziert werden kann:

Preis	*0,79*	*0,78*	*0,77*	*0,76*
0,79	*200 , 200*	*0 , 300*	*0 , 200*	*0 , 100*
0,78	*300 , 0*	*150 , 150*	*0 , 200*	*0 , 100*
0,77	*200 , 0*	*200 , 0*	*100 , 100*	*0 , 100*
0,76	*100 , 0*	*100 , 0*	*100 , 0*	*50 , 50*

Diese Vorgehensweise läßt sich bei diesem Beispiel fortsetzen. Für Spieler 1 wird nun die Strategie 2 (0,79) von Strategie 3 (0,78) dominiert, und entsprechend für Spieler 2. Man erreicht am Ende, dass für jeden Spieler die Strategie 5 (0,76) übrig bleibt und dieses Strategiepaar bildet ein Nash-Gleichgewicht.
Man beachte aber, dass die Reduzierungen nicht zu strategisch äquivalenten Spielen geführt haben. Die Wahl von 0,75 für beide Spieler stellt ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht dar, das aber durch die Reduktionen verloren gegangen ist.

Wir erwähnen als Nächstes noch ein weiteres Lösungskonzept, das in der spieltheoretischen Literatur manchmal auftritt und aus der multikriteriellen Optimierung (Optimierung mit mehreren Zielfunktionen) stammt.

Definition 1.10 *Für ein Spiel Γ mit Auszahlung wird ein Vektor $x^* \in X := X^1 \times \ldots \times X^m$ ein Pareto-Gleichgewicht genannt, wenn es kein $x \in X$ gibt, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} u_i(x) &\geq u_i(x^*) \ \forall \ i = 1, \ldots, m \\ u_k(x) &> u_k(x^*) \text{ für mindestens ein } k \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

Ein Pareto-Gleichgewicht x^* liegt also dann vor, wenn es keine Strategiekombination x gibt, deren Nutzen für alle Spieler mindestens so gut wie x^* und für mindestens einen Spieler k echt besser ist.

Im Beispiel 1.2 sind die Strategiekombinationen (G,S), (S,G) und (S,S) allesamt Pareto-Gleichgewichte, nicht aber das einzige Nash-Gleichgeicht (G,G). Dies zeigt, dass das Pareto-Gleichgewicht mit dem Nash-Gleichgewicht nicht vergleichbar ist. Das Pareto-Gleichgewicht spielt in der Spieltheorie nur eine untergeordnete Rolle.

1.5 Klassifikation strategischer Spiele

Strategische Spiele der Form $\Gamma := (\mathcal{A}, X, \succeq)$ mit $X = \prod_{i=1}^{m} X^i$ können zunächst nach der Kardinalität der Mengen X^i unterschieden werden. Danach heißt Γ

- endlich, wenn alle Strategiemengen X^i ($i \in \{1, \ldots, m\}$) endlich sind;
- abzählbar, wenn mindestens eine Strategiemenge X^i abzählbar ist, und die übrigen höchstens abzählbar sind;
- kontinuierlich, wenn wenigstens eine der Mengen X^i überabzählbar ist.

Endliche Spiele mit nur zwei Akteuren (Spielern) sind von besonderer Bedeutung und erhalten daher einen eigenen Namen:

- Ein endliches 2-Personen-Nullsummenspiel heißt Matrixspiel.
- Ein endliches 2-Personen-Spiel heißt Bi-Matrixspiel.

Es soll kurz begründet werden, weshalb man in den angesprochenen Fällen von Matrix- bzw. Bi-Matrix-Spielen sprechen kann. Direkt einsehbar ist, dass jedes endliche Spiel strategisch äquivalent einem endlichen Spiel mit Auszahlung ist bei geeigneter Festlegung der Auszahlungsfunktionen u_i. Da nach Voraussetzung die Strategiemengen endlich sind, können sie bei einem 2-Personen-Spiel wie folgt dargestellt werden: $X^1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ und $X^2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Definieren wir nun

$$a_{ij} := u_1(x_i, y_j)\ , \quad b_{ij} := u_2(x_i, y_j) \quad \text{für } i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, n$$

so erhalten wir zwei Matrizen $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jeweils in $\mathbb{R}^{p\times n}$, die Auszahlungsmatrizen von Spieler 1 bzw. 2 genannt werden. Da man im allgemeinen zwei Matrizen benötigt, spricht man von einem Bi-Matrixspiel. Im Falle eines 2-Personen-Nullsummenspiels gilt $B = -A$, so dass man zur Beschreibung der Auszahlung tatsächlich nur eine Matrix benötigt, und daher von einem Matrixspiel spricht. Die Beispiele 1.1 und 1.2 sind Bi-Matrixspiele, wogegen Beispiel 1.3 als Matixspiel anzusehen ist.

Es gibt weitere Klassifikationsmerkmale für strategische Spiele, die sich insbesondere auf spezielle spieltheoretische Themenstellungen oder besondere Eigenschaften von Spielen beziehen. Wir geben dazu die folgende Liste an, die wir im Wesentlichen der Arbeit [1] von C. Kanzow entnommen haben und die bei der Einordnung spezieller spieltheoretischer Probleme hilfreich sein kann:

- **kooperative vs. nicht-kooperative Spiele**
  Bei nicht-kooperativen Spielen wird davon ausgegangen, dass die einzelnen Spieler strikt gegeneinander agieren und es keine Kooperation (Absprachen) zwischen den Akteuren gibt, wie sie bei kooperativen Spielen erlaubt sind. Zur Sicherung des Wettbewerbs ist das Bundeskartellamt beispielsweise dafür verantwortlich, dass es in gewissen Bereichen (etwa bei Mineralölkonzernen) keine Kooperation (Preisabsprachen) gibt. Dagegen ist das Ölkartell OPEC ein Beispiel für Kooperation, indem sich alle Teilnehmer auf Förderquoten einlassen und diese einhalten müssen.
- **statische vs. dynamische Spiele**
  Bei statischen Spielen wählen alle Spieler ihre Strategie simultan aus. Kei-

nem Spieler sind die Entscheidungen der Gegenspieler bekannt. Bei den dynamischen Spielen hingegen tritte eine zeitliche Reihenfolge der Spielzüge auf.

- **One-shot games vs. wiederholte Spiele**
  One-shot games werden genau einmal gespielt, bei den wiederholten Spielen hingegen kann ein und dasselbe Spiel mehrfach hinereinander gespielt werden. Die Lösung des wiederholten Spiels wird dabei nicht immer einer gleichen Abfolge der Lösung des one-shot game entsprechen, weil jetzt Lerneffekte unterstellt werden, die einen Einfluß auf die Wahl der möglichen Strategien haben können oder gewisse Strategien ganz ausschließen.

- **Spiele mit vollständiger vs. unvollständiger Information**
  Das hier angesprochene Unterscheidungsmerkmal bezieht sich auf die Informationslage der Spieler. Bei Spielen mit vollständiger Information stehen sämtliche relevanten Informationen allen Spielern zur Verfügung. Jeder Spieler kennt die möglichen Strategien sowie die Auszahlungsfunktionen von allen Mitspielern. Man spricht dann auch von Spielen mit vollständiger Information. Andernfalls handelt es sich um ein Spiel mit unvollständiger Information.
  Schach ist beispielsweise ein Spiel mit vollständiger Information. Beide Spieler kennen den bisherigen Spielverlauf und sind über alle Möglichkeiten, wie der Mitspieler im nächsten Schritt agieren kann, informiert. Dagegen ist Skat ein Spiel mit mit unvollständiger Information.

Schwerpunkt dieser Vorlesung sind Spiele, die die folgenden Eigenschaften besitzen: Die behandelten Spiele sind nicht-kooperativ, sie sind statisch, one-shot games und mit vollständiger Information ausgestattet. Spiele mit anderen Eigenschaften werden - wenn überhaupt - nur am Rande und dann eher beispielhaft behandelt.

Kapitel 2

Existenz von Nash-Gleichgewichten

In den einfachen Beispielen des ersten Kapitels haben wir gesehen, dass ein spieltheoretisches Problem ein oder mehrere Nash-Gleichgewichte haben kann, dass es aber auch Probleme ohne Nash-Gleichgewichte gibt. In diesem Kapitel wird ein Existenzsatz von Nikaido-Isoda vorgestellt, der allerdings auf einem Fixpunktsatz von Kakutani beruht, der hier nur zitiert wird. Die Grundlage für den Beweis des genannten Existenzsatzes stellt die so genannte Beste-Antwort-Funktion dar, die wir als erstes vorstellen.

2.1 Die Abbildung der Bestantwort

Wenn ein Spieler i eine Strategiekombination $x^{-i} \in X^{-i} := X^1 \times \dots X^{i-1} \times X^{i+1} \dots X^m$ seiner Mitspieler kennen würde, so würde er dazu aus seiner Strategiemenge X^i eine bestmögliche unter der Bedingung, dass x^{-i} bereits vorliegt, wählen. Eine solche Strategie s^i (falls sie existiert) ist durch folgende Bedingung gekennzeichnet:

$$s^i \succeq_{i\,|\,x^{-i}} x^i \quad \text{für alle } x^i \in X^i \tag{2.1}$$

Mit Hilfe einer Nutzenfunktion u_i für Spieler i läßt sich diese Bedingung äquivalent auch so formulieren, dass s^i ein Maximierer des folgenden Problems ist:

$$\max u_i(x^i, x^{-i}) \quad \text{s.d. } x^i \in X^i \tag{2.2}$$

Dabei ist x^{-i} als fest vorgegeben anzusehen. Mit $\mathcal{S}_i(x^{-i})$ bezeichnen wir die Menge aller Optimallösungen der Aufgabe (2.2).

Definition 2.1 *Die Abbildung $x^{-i} \mapsto \mathcal{S}_i(x^{-i})$ heißt beste Antwort des Spielers i (auf die Strategiekombination x^{-i} der Mitspieler). Die zusammengesetzte Abbil-*

dung $x \mapsto \mathcal{S}(x)$ *mit*

$$\mathcal{S}(x) := \mathcal{S}_1(x^{-1}) \times \ldots \times \mathcal{S}_m(x^{-m})$$

von X *in die Potenzmenge* $\wp(X)$ *wird Beste-Antwort-Funktion des gegebenen Spiels* Γ *genannt.*

Satz 2.1 *Für ein Spiel* $\Gamma := (\mathcal{A}, X, U)$ *ist* $x^* \in X$ *genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn* $x^* \in \mathcal{S}(x^*)$ *ist.*

BEWEIS: 1) Sei x^* ein Nash-Gleichgewicht von Γ. Dann gilt nach Satz 1.1 für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$, dass $x^{*\,i}$ ein Maximierer der Aufgabe

$$\max u_i(x^i, x^{*,\,-i}) \quad \text{s.d. } x^i \in X^i$$

ist. Dies heißt, dass $x^{*\,i} \in \mathcal{S}_i(x^{*\,-i})$ und somit $x^* \in \mathcal{S}(x^*)$ ist.
2) Geht man umgekehrt von $x^* \in \mathcal{S}(x^*)$ aus, so sieht man unmittelbar ein, dass die Inklusionen unter 1) auch rückwärts durchlaufen werden können, womit der Satz bewiesen ist. □

Beispiel 2.1 *Mit Hilfe des Beispiels 1.2 (Gefangenendilemma) aus dem vorangehenden Kapitel wird Satz 2.1 erläutert. Die Auszahlungsfunktionen aus diesem Beispiel lauten:*

$$u_1(S,G) = -10\ ,\ u_1(G,G) = -5\ ,\ u_1(S,S) = -2\ ,\ u_1(G,S) = -1$$
$$u_2(G,S) = -10\ ,\ u_2(G,G) = -5\ ,\ u_2(S,S) = -2\ ,\ u_2(S,G) = -1$$

Bestimme die Menge $\mathcal{S}(G,S) := \mathcal{S}_1(S) \times \mathcal{S}_2(G)$*:*

$$\textit{Lösungsmenge von } \max\ u_1(x,S) \textit{ mit } x \in \{G,S\}: \qquad \mathcal{S}_1(S) = \{G\}$$
$$\textit{Lösungsmenge von } \max\ u_2(G,y) \textit{ mit } y \in \{G,S\}: \qquad \mathcal{S}_2(G) = \{G\}$$

Bestimme die Menge $\mathcal{S}(S,G) := \mathcal{S}_1(G) \times \mathcal{S}_2(S)$*:*

$$\textit{Lösungsmenge von } \max\ u_1(x,G) \textit{ mit } x \in \{G,S\}: \qquad \mathcal{S}_1(G) = \{G\}$$
$$\textit{Lösungsmenge von } \max\ u_2(S,y) \textit{ mit } y \in \{G,S\}: \qquad \mathcal{S}_2(S) = \{G\}$$

Bestimme die Menge $\mathcal{S}(G,G) := \mathcal{S}_1(G) \times \mathcal{S}_2(G)$*:*

$$\textit{Lösungsmenge von } \max\ u_1(x,G) \textit{ mit } x \in \{G,S\}: \qquad \mathcal{S}_1(G) = \{G\}$$
$$\textit{Lösungsmenge von } \max\ u_2(G,y) \textit{ mit } y \in \{G,S\}: \qquad \mathcal{S}_2(G) = \{G\}$$

Bestimme die Menge $\mathcal{S}(S,S) := \mathcal{S}_1(S) \times \mathcal{S}_2(S)$*:*

$$\begin{aligned} &\textit{Lösungsmenge von } \max u_1(x,S) \textit{ mit } x \in \{G,S\}: && \mathcal{S}_1(S) = \{G\} \\ &\textit{Lösungsmenge von } \max u_2(S,y) \textit{ mit } y \in \{G,S\}: && \mathcal{S}_2(S) = \{G\} \end{aligned}$$

Es gilt also: $\mathcal{S}(G,S) = \{(G,G)\}$, $\mathcal{S}(S,G) = \{(G,G)\}$, $\mathcal{S}(G,G) = \{(G,G)\}$, $\mathcal{S}(S,S) = \{(G,G)\}$*. Damit ist bestätigt, dass gerade für das Nash-Gleichgewicht* $x^* = (G,G)$ *die Bedingung* $x^* \in \mathcal{S}(x^*)$ *erfüllt ist.* □

2.2 Gemischte Erweiterung

Zur Einführung betrachten wir zunächst ein Spiel mit zwei Spielern 1 und 2, den 2-elementigen Strategiemengen $X^1 = \{x_1^1, x_2^1\}$ und $X^2 = \{x_1^2, x_2^2\}$ und der Auszahlung $U = (u_1, u_2)$. Bei der Untersuchung eines solchen Spiels haben wir bisher ausschließlich Strategiekombinationen (x_i^1, x_j^2) $(i,j \in \{1,2\})$ zugelassen. Wie das Beispiel „Stein-Schere-Papier“ zeigte, muss sich unter solchen Strategien kein Nash-Gleichgewicht befinden. Außerdem ist es nicht immer sinnvoll, sich für genau eine Strategie zu entscheiden. Wird das genannte Spiel oft wiederholt, so macht es vielmehr Sinn, dass jeder Spieler eine Strategie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit spielt. Der Strategiemenge X^i des Spielers i ordnen wir die „erweiterte Strategiemenge“ $\widehat{X^i} \in \mathbb{R}^2$ zu, die wie folgt definiert ist:

$$\widehat{X^i} := \{(\xi_1^i, \xi_2^i) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1^i + \xi_2^i = 1,\ \xi_1^i \geq 0,\ \xi_2^i \geq 0\}$$

Als Strategie wählt Spieler 1 einen Vektor $(\xi_1^1, \xi_2^1) \in \widehat{X^1}$ mit der Bedeutung, dass seine urprünglichen Strategien x_1^1 und x_2^1 mit jeweils der Wahrscheinlichkeit ξ_1^1 bzw. ξ_2^1 gespielt werden (z.B. unter Verwendung eines Wahrscheinlichkeitsmechanismus). Der Vektor (ξ_1^1, ξ_2^1) wird dann eine „gemischte Strategie“ des Spielers 1 genannt. Die spezielle gemischte Strategie $e_1 = (1,0)$ (bzw. $e_2 = (0,2)$) bedeutet, dass Spieler 1 jeweils nur die ursprüngliche Strategie x_1^1 (bzw. x_2^1) spielt, die in diesem Kontext nun „reine Strategie“ genannt wird. Entsprechend sind Vektoren $(\xi_1^2, \xi_2^2) \in \widehat{X^2}$ für Spieler 2 zu interpretieren.

Für gegebene gemischte Strategien $\xi^1 := (\xi_1^1, \xi_2^1) \in \widehat{X^1}$ bzw. $\xi^2 := (\xi_1^2, \xi_2^2) \in \widehat{X^2}$ der beiden Spieler wird die erweiterte Auszahlungsfunktion $\widehat{u}_i$ für Spieler $i \in \{1,2\}$ wie folgt festgelegt:

$$\widehat{u}_i(\xi^1, \xi^2) := \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \xi_k^1 \xi_j^2\ u_i(x_k^1, x_j^2)$$

Sie entspricht dem Erwartungswert des Spielers i für die Verteilungvektoren ξ^1 und ξ^2.

Beispiel 2.2 *Zur Erläuterung der Begriffe greifen wir auf Beispiel 1.1 zurück. Wir nehmen an, dass sich Frederic auf Grund eines Zufallsmechanismus mit jeweils der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ für F bzw. K entscheidet; für Nicole seien diese Wahrscheinlichkeiten mit $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ gegeben. Eine gemischte Strategie ist dann $\xi^1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ für Spieler 1 und $\xi^2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ für Spieler 2. Die Auszahlungsfunktionen $\widehat{u}^i(\xi^1, \xi^2)$ $(i = 1, 2)$ geben dann den Erwartungswert des „Nutzens" für Spieler i an, der bei der Wahl der gemischten Strategiekombination $\xi := (\xi^1, \xi^2)$ entsteht.*

Es soll nun allgemein die gemischte Erweiterung eines endlichen Spiels mit Auszahlung definiert werden.

Definition 2.2 *Gegeben sei ein Spiel $\Gamma := (\mathcal{A}, X, U)$ mit den endlichen Strategiemengen $X^i := \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n_i}^i\}$ für $i \in \{1, \ldots m\}$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ wird die erweiterte Strategiemenge durch*

$$\widehat{X^i} := \{(\xi_1^i, \ldots, \xi_{n_i}^i) \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \sum_{j=1}^{n_i} \xi_j^i = 1\,,\ \xi_j^i \geq 0 \ \forall\, j = 1, \ldots, n_i\}$$

definiert. Für $(\xi^1, \ldots, \xi^m) \in \widehat{X} := \widehat{X^1} \times \ldots \times \widehat{X^m}$ wird die i-te Auszahlungsfunktion $\widehat{u}_i$ durch

$$\widehat{u}_i(\xi^1, \ldots, \xi^m) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{j_m=1}^{n_m} (\xi_{j_1}^1 \cdot \ldots \cdot \xi_{j_m}^m)\ u_i(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_m}^m)$$

eingeführt. Mit $\widehat{U} = (\widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_m)$ heißt dann das Spiel $\widehat{\Gamma} := \left(\mathcal{A}, \widehat{X}, \widehat{U}\right)$ die gemischte Erweiterung des Spiels Γ.

- Jedes Element aus der Menge $\widehat{X^i} \subset \mathbb{R}^{n_i}$ wird eine gemischte Strategie von i genannt. Jedem Vektor $e_k \in \widehat{X^i}$ entspricht eine „ursprüngliche" Strategie x_k^i, die nun **reine Strategie** genannt wird (für die gemischte Strategie e_k des Spielers i schreiben wir: x_k^i). $\widehat{X^i}$ ist die konvexe Hülle in $\mathbb{R}^{n_i}$ der n_i Einheitsvektoren e_k.
- Jede Menge $\widehat{X^i}$ ist ein kompaktes, konvexes Polyeder. Als Produktmenge dieser Mengen ist somit auch $\widehat{X}$ eine kompakte, konvexe Menge. Deshalb wird $\widehat{\Gamma}$ auch Konvexivizierung des endlichen Spiels Γ genannt.

Für die Funktionen $\widehat{u}_i$ erhält man aus Definition 2.2 die folgende nützliche Darstellungsformel für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\widehat{u}_i(\xi) = \sum_{j=1}^{n_i} \xi_j^i\ \widehat{u}_i(x_j^i, \xi^{-i}) \tag{2.3}$$

BEWEIS: Wir begründen die Formel o.B.d.A. für $i = 1$:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_1(\xi) &= \sum_{j_1=1}^{n_1} \xi_{j_1}^1 \Big[\sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} (\xi_{j_2}^2 \cdot \ldots \cdot \xi_{j_m}^m)\, u_1(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_m}^m) \Big] \\
&= \sum_{j_1=1}^{n_1} \xi_{j_1}^1 \Big[\sum_{j=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} (\delta_{j\, j_1} \xi_{j_2}^2 \cdot \ldots \cdot \xi_{j_m}^m)\, u_1(x_{j_1}^1, \dots, x_{j_m}^m) \Big] \\
&= \sum_{j=1}^{n_1} \xi_j^1\, \widehat{u}_1(x_j^1, \xi^{-1})
\end{aligned}$$

Dabei sind die Zahlen $\delta_{j\, j_1}$ die Koordinaten des Vektors $e_{j_1} \in \mathbb{R}^{n_1}$. □

2.3 Ein Existenzsatz von Nikaido-Isoda

Das grundlegende Lösungskonzept der Spieltheorie beruht auf dem Begriff des Nash-Gleichgewichts. Wie wir gesehen haben, tritt schon für relativ einfache Beispiele der Fall ein, dass ein Nash-Gleichgewichtspunkt nicht existiert. Ein zentrales Problem der Spieltheorie besteht somit darin, unter speziellen Bedingungen die Existenz eines Nash-Gleichgewichts nachzuweisen. In diesem Abschnitt wird ein erster Existenzsatz vorgestellt, der auf dem Fixpunktsatz von Kakutani beruht. Um diesen Satz formulieren zu können, sind einige Begriffe bereit zu stellen.

Definition 2.3 *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt eine Abbildung $f : X \mapsto \wp(\mathbb{R}^m)$ (wobei $\wp(\mathbb{R}^m)$ die Potenzmenge von $\mathbb{R}^m$ ist) eine Punkt-Menge-Abbildung.*

Im Folgenden legen wir ein Spiel $\Gamma := (\mathcal{A}, X, U)$ zugrunde mit $X^i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ für $i = 1, \dots, m$. Bei der Definition der Beste-Antwort-Funktion wurde für vorgegebenes $x \in X$ und jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ die Menge der Maximierer jeder Aufgabe

$$\max\ u_i(x_i, x^{-i}) \quad \text{s.d. } x_i \in X^i \tag{2.4}$$

mit $\mathcal{S}_i(x^{-i})$ bezeichnet und dann $\mathcal{S}(x) := \mathcal{S}_1(x^{-1}) \times \ldots \times \mathcal{S}_m(x^{-m})$ gesetzt. Die durch $\Phi(x) := \mathcal{S}(x)$ definierte Funktion Φ ordnet somit jedem Punkt $x \in X$ die Teilmenge $\mathcal{S}(x) \in \wp(X)$ zu mit $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_m}$, ist also ein Beispiel für eine Punkt-Menge-Abbildung.

Ein wichtiger Begriff für Punkt-Menge-Abbildungen ist der der Abgeschlossenheit.

Definition 2.4 *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Punkt-Menge-Abbildung $f : X \mapsto \wp(\mathbb{R}^m)$ wird abgeschlossen genannt, falls für je zwei konvergente Folgen $\{x_k\} \mapsto x$ in X und $\{y_k\} \mapsto y$ in $\mathbb{R}^m$ mit $y_k \in f(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt: $y \in f(x)$.*

Damit sind wir in der Lage, den wichtigen Fixpunktsatz von Kakutani zu formulieren. Auf einen Beweis dieses Satzes soll aber im Rahmen dieser Ausarbeitung verzichtet werden.

Satz 2.2 (Fixpunktsatz von Kakutani)
Sei X eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die Abbildung $f : X \mapsto \wp(X)$ sei ferner abgeschlossen und besitze die Eigenschaft, dass die Mengen $f(x)$ für alle $x \in X$ nichtleer und konvex sind. Dann besitzt die Abbildung f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x^* \in X$ mit $x^* \in f(x^*)$.

Nach Satz 2.1 ist $x^* \in X$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn $x^* \in S(x^*)$ ist, d.h. wenn x^* ein Fixpunkt der Beste-Antwort-Funktion Φ ist. Damit ist nachzuweisen, dass Φ die Voraussetzungen des Satzes von Kakutani erfüllt. Das ist aber nur möglich, wenn das Spiel Γ gewissen Voraussetzungen genügt. Zu deren Formulierung ist eine weitere Definition erforderlich.

Definition 2.5 *D sei eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^p$. Eine Funktion $g : D \mapsto \mathbb{R}$ heißt quasikonkav auf D, wenn für alle $x, y \in D$ gilt:*

$$g(x) \leq g(y) \quad \Longrightarrow \quad g(x) \leq g(\lambda\, x + (1 - \lambda)\, y) \quad \forall\, \lambda \in (0, 1)$$

Man bestätigt leicht, dass eine auf einer konvexen Menge D konkave Funktion auch quasikonkav ist. Quasikonkave Funktionen besitzen eine wichtige Anwendung in Bezug auf Maximierungsaufgaben der Form

$$\max\ g(x)\ \text{ s.d. } x \in D \tag{2.5}$$

Satz 2.3 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ konvex und $g : D \mapsto \mathbb{R}$ quasikonkav. Dann ist die Menge der Optimallösungen der Aufgabe (2.4) eine konvexe Teilmenge von D.*

Beweis: D^* sei die Menge der Maximierer der Aufgabe (2.5). Falls D^* die leere Menge ist, dann ist nichts zu zeigen. Seien nun $x^*, y^* \in D^*$. Dann gilt $g(x^*) = g(y^*)$, so dass aus der Definition der Quasikonkavität von g für alle $\lambda \in (0, 1)$ folgt: $g(x^*) \leq g(\lambda\, x^* + (1 - \lambda)\, y^*)$. Hierin kann aber nur das Gleichheitszeichen gelten, weil x^* ein Maximierer ist. Also folgt: $\lambda\, x^* + (1 - \lambda)\, y^* \in D^*$, somit ist D^* konvex. □

Auf der Grundlage des Fixpunktsatzes von Kakutani beweisen wir nun einen Existenzsatz für das Nash-Gleichgewicht.

Satz 2.4 (Existenzsatz von Nikaido-Isoda)
Sei $\Gamma := (\mathcal{A}, X, U)$ *ein Spiel, so dass für alle* $i = 1, \ldots, m$ *die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

a) Die Strategiemengen X^i *sind nichtleer, konvex und kompakt.*

b) Die Auszahlungsfunktionen $u_i : X \mapsto \mathbb{R}$ *sind stetig.*

c) Die Auszahlungsfunktionen $u_i(x^i, x^{-i})$ *sind quasikonkav als Abbildung in* x^i *(für alle* x^{-i}*).*

Dann besitzt das Spiel Γ *ein Nash-Gleichgewicht.*

BEWEIS: Betrachtet wird die Punkt-Menge-Abbildung $\Phi \mapsto \wp(X)$, definiert durch

$$\Phi(x) := \mathcal{S}(x) := \mathcal{S}_1(x^{-1}) \times \ldots \times \mathcal{S}_m(x^{-m})$$

Die Lösungsmengen $\mathcal{S}(x^{-i})$ der Maximierungsaufgaben (2.4) sind nichtleer, weil jeweils der zulässige Bereich X^i nichtleer und kompakt und die Funktion u_i stetig ist. Ferner sind sie konvex, weil die Funktionen $u_i(x^i, x^{-i})$ quasikonkav in x^i sind. Die Menge $\mathcal{S}(x)$ ist als kartesisches Produkt der Mengen $\mathcal{S}(x^{-i})$ damit ebenfalls nichtleer und konvex.
Als Nächstes zeigen wir, dass die Abbildung Φ abgeschlossen ist. Seien dazu zwei Folgen $x^k \mapsto x$ in X und $s^k \mapsto s$ mit $s^k \in \Phi(x^k)$ gegeben. Dann gilt

$$u_i(s^{k,i}, x^{k,-i}) \geq u_i(x^i, x^{k,-i}) \quad \forall\, x^i \in X^i \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

für alle $i = 1, \ldots, m$. Für $k \mapsto \infty$ folgt aus der Stetigkeit von u_i

$$u_i(s^i, x^{-i}) \geq u_i(x^i, x^{-i}) \quad \forall\, x^i \in X^i$$

für alle $i = 1, \ldots, m$. Also ist s^i für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ eine Lösung des Optimierungsproblems (2.4). Also ist $s \in \mathcal{S}(x)$ und somit ist Φ abgeschlossen.
Die Abbildung Φ erfüllt somit die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes 2.2 von Kakutani. Somit gibt es einen Punkt $x^* \in \mathcal{S}(x^*) =: \Phi(x^*)$, der nach den Vorüberlegungen ein Nash-Gleichgewichtspunkt ist. □

Beispiel 2.3 (Cournot'sches Oligopol)
In einem oligopolistischen Angebotsmodell wird davon ausgegangen, dass ein spezielles homogenes Gut von m konkurrierenden Unternehmen auf den Markt gebracht wird. Die Angebotsmenge des Unternehmens $i \in \{1, \ldots, m\}$ *sei mit* x_i*, die gesamte Angebotsmenge der m Unternehmen mit* $\xi := \sum_{i=1}^{m} x_i$ *bezeichnet. Der Preis pro Mengeneinheit für das Gut hängt von der Menge* ξ *ab, die angeboten*

wird, sie wird mit $p(\xi)$ notiert (man spricht hier von der inversen Nachfragefunktion). Die Produktionskosten des Unternehmens i sind eine Funktion der Ausbringungsmenge x_i, sie werden mit $c_i(x_i)$ bezeichnet.
Der Profit der Firma i berechnet sich dann zu

$$u_i(x_i) := x_i \cdot p(\xi) - c_i(x_i) \;\; mit \;\; x_i \geq 0$$

Wenn b_i die Produktionskapazität des Unternehmens i bezeichnet, so sind die Mengen x_i wählbar aus $[0, b_i]$.
Es liegt also ein spieltheoretisches Problem vor mit den Spielern $i = 1, \ldots, m$, den unendlichen Strategiemengen $X_i := [0, b_i]$ und den Auszahlungsfunktionen u_i. Die Modellannahmen sind dann üblicherweise so, dass die Funktion p als stetig und konkav in der Variablen ξ und die Funktionen c_i als stetig und konvex angenommen werden.
Man kann dann ohne Mühe begründen, dass alle Voraussetzungen des Satzes 2.4 erfüllt sind, somit ein Nash-Gleichgewichtspunkt x^* existiert. Er wird auch Cournot'sches Gleichgewicht des Oligopols genannt.
Abänderung der Strategie (d.h. Ausbringungsmenge) des i-ten Spielers von x_i^* auf x_i kann, wenn die übrigen Spieler die Strategiekombination $x^{*,-i}$ beibehalten, keine Verbesserung der Gewinnfunktion für i ergeben.

Wie wir bereits gesehen haben, gibt es endliche Spiele, die kein Nash-Gleichgewicht besitzen. Eine Folgerung aus dem Existenzsatz von Nikaido-Isoda besteht darin, dass jede gemischte Erweiterung eines endlichen Spiels ein Nash-Gleichgewicht hat.

Korollar 2.1 *Sei $\Gamma := (\mathcal{A}, X, U)$ ein endliches Spiel und $\widehat{\Gamma} := \left(\mathcal{A}, \widehat{X}, \widehat{U}\right)$ die gemischte Erweiterung von Γ. Dann besitzt $\widehat{\Gamma}$ ein Nash-Gleichgewicht ξ^*.*

Beweis: Aus der Definition 2.2 folgt direkt, dass die Strategiemengen $\widehat{X^i}$ nichtleere, konvexe, kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^{n_i}$ sind und dass die Funktionen $\widehat{u_i}$ in ξ stetig und in jeder Variablen ξ_i linear und damit pseudokonkav sind. Damit sind alle Voraussetzungen des Existenzsatzes für $\widehat{\Gamma}$ erfüllt, also besitzt $\widehat{\Gamma}$ ein Nash-Gleichgewicht. □

Kapitel 3

Endliche Spiele

Die gemischte Erweiterung endlicher Spiele ist in Abschnitt 2.2 eingeführt worden. Diese Art Spiele ist in der Literatur sehr intensiv behandelt worden. Wie wir zeigen konnten, besitzen sie ein Nash-Gleichgewicht, was auf endliche Spiele im Allgemeinen nicht zutrifft. In diesem Kapitel untersuchen wir Zweipersonen-Nullsummen-Spiele, die nach Satz 1.3 zu Zweipersonen-Konstantensummen-Spielen strategisch äquivalent sind. Sie können als so genannte Matrixspiele in sehr übersichtlicher Form dargestellt und behandelt werden. Allgemeine (endliche) Zweipersonen-Spiele werden anschließend betrachtet; sie sind zu so genannten Bi-Matrixspielen äquivalent. Schließlich wird eine Verbindung zur Optimierung und zu Linearen Komplementaritätsproblemen hergestellt. Auf dieser Grundlage können dann spezielle Verfahren zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten hergeleitet werden.

3.1 Grundlegende Eigenschaften

Als erstes wird eine spezielle Charakterisierung des Nash-Gleichgewichts bei gemischten Strategien vorgestellt. Erinnert sei daran, dass ein Nash-Gleichgewicht ξ^* dadurch definiert ist, dass für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\widehat{u}_i(\xi^*) \;\geq\; \widehat{u}_i(\xi^i, \xi^{*,-i}) \;\; \forall \;\; \xi^i \in \widehat{X^i} \tag{3.1}$$

Der folgende Satz zeigt, dass es genügt, auf der rechten Seite dieser Ungleichung an Stelle von $\xi^i \in \widehat{X^i}$ lediglich $x^i_j \in X^i$ zu verlangen.

Satz 3.1 *Gegeben sei ein Spiel* $\Gamma := (\mathcal{A},\, X,\, U)$ *mit den endlichen Strategiemengen* $X^i := \{x^i_1, x^i_2, \ldots, x^i_{n_i}\}$ *für* $i \in \{1, \ldots m\}$ *sowie seine gemischte Erweiterung* $\widehat{\Gamma}$. *Genau dann ist* ξ^* *ein Nash-Gleichgewicht in* $\widehat{\Gamma}$, *wenn für jedes* $i \in \{1, \ldots, m\}$

gilt:

$$\widehat{u}_i(\xi^*) \;\geq\; \widehat{u}_i(x_j^i, \xi^{*,-i}) \;\; \forall \;\; j \in \{1, \ldots, n_i\} \tag{3.2}$$

BEWEIS: Ist (3.1) erfüllt, dann ist erst recht (3.2) erfüllt, weil die Menge der reinen Strategien des Spielers i eine Teilmenge von $\widehat{X^i}$ ist. Ist nun umgekehrt (3.2) erfüllt, so folgt:

$$\widehat{u}_i(\xi^*) \;=\; \sum_{j=1}^{n_i} \widehat{u}_i(\xi^*)\, \xi_j^i \;\geq\; \sum_{j=1}^{n_i} \widehat{u}_i(x_j^i, \xi^{*,-i})\, \xi_j^i \;=\; \widehat{u}_i(\xi^i, \xi^{*,-i})$$

für beliebiges $\xi^i \in \widehat{X^i}$. Verwendet wurden dabei (3.2) und (2.3). Damit ist die Aussage bewiesen. □

Korollar 3.1 *Sei x^* ein Nash-Gleichgewicht des endlichen Spiels $\Gamma := (\mathcal{A}, X, U)$. Dann ist x^* auch ein Nash-Gleichgewicht in der gemischten Erweiterung $\widehat{\Gamma}$.*

BEWEIS: Nach Definition des Nash-Gleichgewichts in Γ gilt für alle i:

$$\begin{aligned} & u_i(x^*) \geq u_i(x_j^i, x^{*\,-i}) \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n_i\} \\ \iff \;& \widehat{u}_i(x^*) \geq \widehat{u}_i(x_j^i, x^{*\,-i}) \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n_i\} \end{aligned}$$

Nach (3.2) folgt daraus die Behauptung. □

Offensichtlich ist ein Nash-Gleichgewicht ξ^* in der gemischten Erweiterung $\widehat{\Gamma}$ schon ein Nasch-Gleichgewicht des Spiels Γ, wenn ξ^* nur aus reinen Strategien besteht. Das ist genau dann der Fall, wenn jedes $\xi^{*\,i}$ mit einem Einheitsvektor der Form $e_k \in \mathbb{R}^{n_i}$ identisch ist.

Die Lösungsmethoden von Zweipersonen-Nullsummen-Spielen sind eng mit dem Begriff des „Sattelpunktes“ einer Funktion f von zwei Variablen verknüpft. Aus diesem Grunde wird auf diesen Begriff mit seinen grundlegenden Eigenschften kurz eingegangen.

Definition 3.1 *Sei $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei Variablen x und y. Dann heißt ein Punkt $(x^*, y^*) \in X \times Y$ Sattelpunkt der Funktion f, falls gilt:*

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \;\; \forall\, (x, y) \in X \times Y$$

Der folgende Satz zeigt, dass die Funktionswerte verschiedener Sattelpunkte von f stets gleich sind und dass Sattelpunkte auch „gemischt“ werden können.

Satz 3.2 *Sei $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion in x und y und seien $(x^*, y^*), (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in X \times Y$ Sattelpunkte von f. Dann sind auch $(x^*, \widetilde{y})$ und $(\widetilde{x}, y^*)$ Sattelpunkte von f und es gilt:*

$$f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = f(x^*, y^*) = f(x^*, \widetilde{y}) = f(\widetilde{x}, y^*)$$

Beweis: Da beide Punkte Sattelpunkte sind, erhält man folgende Ungleichungen:

$$f(x^*, \widetilde{y}) \leq f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq f(\widetilde{x}, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, \widetilde{y})$$

Da die beiden äußeren Werte der Ungleichungskette gleich sind, folgt Gleichheit:

$$f(x^*, \widetilde{y}) = f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = f(\widetilde{x}, y^*) = f(x^*, y^*)$$

$(\widetilde{x}, y^*)$ ist ein Sattelpunkt von f, denn für beliebiges $(x, y) \in X \times Y$) gilt:

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) = f(\widetilde{x}, y^*) = f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq f(\widetilde{x}, y)$$

Entsprechend weist man nach, dass $(x^*, \widetilde{y})$ ein Sattelpunkt ist. □

Sattelpunkte stetiger Funktionen auf kompakten Mengen lassen sich, wie im Folgenden beschrieben, durch eine min – max-Eigenschaft charakterisieren.

Satz 3.3 *Seien X und Y kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^{n_1}$ bzw. $\mathbb{R}^{n_2}$ und sei $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $(x^*, y^*) \in X \times Y$ genau dann ein Sattelpunkt von f, wenn gilt:*

$$\max_x \min_y f(x, y) = f(x^*, y^*) = \min_y \max_x f(x, y) \tag{3.3}$$

Beweis:
1) Sei $(x^*, y^*) \in X \times Y$ ein Sattelpunkt von f; dann gilt:

$$\begin{aligned} & f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \ \forall\, (x, y) \in X \times Y \\ \Longrightarrow \ & \max_x f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq \min_y f(x^*, y) \\ \Longrightarrow \ & \min_y \max_x f(x, y) \leq f(x^*, y^*) \leq \max_x \min_y f(x, y) \end{aligned}$$

Allgemein aber gilt:

$$\begin{aligned} & \max_x f(x, y) \geq \min_y f(x, y) \\ \Longrightarrow \ & \min_y \max_x f(x, y) \geq \max_x \min_y f(x, y) \end{aligned}$$

Beide Abschätzungen für „min – max“ zusammen liefern aber (3.3).
2) Es werde nun die Gültigkeit von (3.3) vorausgesetzt:

$$\max_x \min_y f(x,y) = \min_y \max_x f(x,y)$$

Setze $F(x) := \min_y f(x,y)$ und $G(y) := \max_x f(x,y)$ und seien x^* und y^* Punkte, an welchen das Maximum von F bzw. das Minimum von G angenommen werden. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \max_x \min_y f(x,y) &= F(x^*) = \min_y f(x^*,y) \le f(x^*,y^*) \\ \min_y \max_x f(x,y) &= G(y^*) = \max_x f(x,y^*) \ge f(x^*,y^*) \end{aligned}$$

Daraus erhält man die folgende Identität:

$$\max_x f(x,y^*) = f(x^*,y^*) = \min_y f(x^*,y)$$

Daraus folgt die doppelte Ungleichung:

$$f(x,y^*) \le f(x^*,y^*) \le f(x^*,y) \ \ \forall\, (x,y) \in X \times Y \qquad \square$$

Beachte: Im Beweis wurde gezeigt, dass eine Funktion $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$, die die Voraussetzung des Satzes 3.3 erfüllt, die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\max_x \min_y f(x,y) \ \le \ \min_y \max_x f(x,y) \tag{3.4}$$

Sind die Mengen X und Y endlich, so sind für jede Funktion $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ die Voraussetzungen von Satzes 3.3 erfüllt.

3.2 Zweipersonen-Nullsummen-Spiele

Gegeben sei ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel durch

$$\Gamma_0 = \Big(\{1,2\}, X^1 \times X^2, (u_1,u_2)\Big)$$

wobei $u_2 := -u_1$ gilt; wir setzen $u := u_1 = -u_2$.
An Stelle von $X^1 := \{x_i^1 \,|\, i = 1,\ldots,p\}$ und $X^2 := \{x_j^2 \,|\, i = 1,\ldots,n\}$ notieren wir die Strategiemengen der beiden Spieler auch kurz mit

$$X^1 := \{1,\ldots,p\} \quad \text{bzw.} \quad X^2 := \{1,\ldots,n\}$$

Die Auszahlungsfunktion u wird üblicherweise mit Hilfe der $(p \times n)$-Matrix

$$A = (u_{ij})_{i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,n} \quad \text{mit } u_{ij} := u(i,j)$$

angegeben, die Auszahlungsmatrix des Spiels genannt wird. A enthält die Auszahlungen für den 1.Spieler, $B = -A$ sind die Auszahlungen für den 2.Spieler.

Zweipersonen-Nullsummen-Spiele sind durch Angabe der Auszahlungsmatrix A eindeutig festgelegt; die Menge der Zeilenindizes $\{1,\ldots,p\}$ gibt die Strategiemenge des 1.Spielers, die Menge der Spaltenindizes $\{1,\ldots,n\}$ jene des 2.Spielers an. Zweipersonen-Nullsummen-Speile werden deshalb auch **Matrixspiele** genannt.

Für sie gibt es - wie der folgende Satz zeigt - eine recht einfache Charakterisierung von Nash-Gleichgewichtspunkten.

Satz 3.4 Γ_0 *sei ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) (i^*, j^*) *ist ein Nash-Gleichgewicht von* Γ_0.

b) (i^*, j^*) *ist ein Sattelpunkt der Funktion* u.

c) Es gilt: $\max_i \ \min_j \ u_{ij} = u_{i^*j^*} = \min_j \ \max_i \ u_{ij}$.

Beweis: Zuerst beweisen wir die Äquivalenz a)$\Longleftrightarrow$ b):

$$\begin{array}{ll}
(i^*, j^*) & \text{sei ein Nash-Gleichgewicht} \\
\Longleftrightarrow & u_1(i^*, j^*) \geq u_1(i, j^*)\ \forall\, i \ \wedge\ u_2(i^*, j^*) \geq u_2(i^*, j)\ \forall\, j \quad (\text{nach Def 1.3}) \\
\Longleftrightarrow & u_1(i^*, j^*) \geq u_1(i, j^*)\ \forall\, i \ \wedge\ u_1(i^*, j^*) \leq u_1(i^*, j)\ \forall\, j \quad (\text{wegen } u_2 = -u_1) \\
\Longleftrightarrow & u(i, j^*) \leq u(i^*, j^*) \leq u(i^*, j)\ \forall\, i\ ,\ \forall\, j \quad (\text{wegen } u = u_1) \\
(i^*, j^*) & \text{ist ein Sattelpunkt}
\end{array}$$

Nach Satz 3.3 ist (i^*, j^*) genau dann ein Sattelpunkt, wenn die Bedingung in c) erfüllt ist. $\square$

Genau dann besitzt also das Spiel Γ_0 ein Nash-Gleichgewicht, wenn

$$\max_i \ \min_j \ u_{ij} = \min_j \ \max_i \ u_{ij} \tag{3.5}$$

ist, und ein Indexpaar (i^*, j^*), an dem der $\max - \min -$ Wert (bzw. $\min - \max -$ Wert) angenommen wird, ist ein Nash-Gleichgewicht. Die Auszahlung

$$v(\Gamma_0) := u_{i^*j^*}$$

an den ersten Spieler heißt dann Spielwert von Γ_0.
Man beachte, dass nach (3.4) allgemein $\max_i \ \min_j \ u_{ij} \leq \min_j \ \max_i \ u_{ij}$ gilt, und wir setzen:

$$\underline{v}(\Gamma_0) := \max_i \ \min_j \ u_{ij} \ \text{ und } \ \overline{v}(\Gamma_0) := \min_j \ \max_i \ u_{ij}$$

Die folgenden Überlegungen zeigen, dass die Minimax-Darstellung (3.5) für die Gewinnung eines Nash-Gleichgewichts von Γ_0 intuitiv einleuchtend ist:

- Überlegung des 1.Spielers: Wenn ich meine Strategie Nr. i spiele, dann gewinne ich mindestens $\min_j u_{ij}$, egal welche Strategie der 2.Spieler spielt. Ich wähle dann diejenige Strategie i, die mir die Auszahlung $\max_i \ \min_j \ u_{ij}$ garantiert.
- Überlegung des 2.Spielers: Wenn ich meine Strategie Nr. j spiele, dann verliere ich höchstens $\max_i u_{ij}$, egal welche Strategie der 1.Spieler spielt. Ich wähle dann diejenige Strategie j, die mir den geringsten Verlust, nämlich $\min_j \ \max_i \ u_{ij}$ bringt.

Die obigen Ausführungen machen deutlich, dass diese Minimax-Strategie nur dann zu einem Nash-Gleichgewicht führt, wenn es ein solches gibt.

Beispiel 3.1 *Wir erläutern die Minimax-Strategie an zwei Zahlenbeispielen. Im ersten Fall betrachten wir die Auszahlungsmatrix*

$$A = (u_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir führen die Minimax-Strategie für den 1.Spieler („Zeilenspieler“) aus:

$$\underline{v}(\Gamma_0) = \max\{1, 4\} = 4 \ \ \textit{angenommen für Strategie } i = 2$$

Entsprechende Überlegungen für den 2.Spieler („Spaltenspieler“) ergeben:

$$\overline{v}(\Gamma_0) := \min\{4, 10, 8\} = 4 \ \ \textit{angenommen für Strategie } j = 1$$

Wegen $\underline{v}(\Gamma_0) = \overline{v}(\Gamma_0)$ gibt es ein Nash-Gleichgeweicht, dieses wird für das Strategiepaar $(i^*, j^*) = (2, 1)$ angenommen.
Wir ändern nun obige Auszahlungsmatrix in einem Element ab, so dass nun

$$A = (u_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

neue Auszahlungsmatrix ist. Man prüft leicht nach, dass gilt:

$$\underline{v}(\Gamma_0) = \max\{1, 0\} = 1\,, \ \ \overline{v}(\Gamma_0) = \min\{4, 10, 8\} = 4$$

Ein Nash-Gleichgewicht ist in diesem Fall nicht vorhanden. □

3.3 Matrixspiele in gemischten Strategien

Zu dem Zweipersonen-Nullsummen-Spiel $\Gamma_0 = (\{1,2\}, X \times Y, (u_1, u_2))$ mit $u_1 = -u_2 =: u$ und $X := \{1, \ldots, p\}$, $Y := \{1, \ldots, n\}$ betrachten wir die zugehörige gemischte Erweiterung, die gegeben ist durch $\widehat{\Gamma}_0 = \left(\{1,2\}, \widehat{X} \times \widehat{Y}, (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)\right)$ mit

$$\widehat{X} := \{x \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^{p} x_i = 1\,,\ x_i \geq 0 \ \forall\, i\} \qquad \widehat{Y} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} y_j = 1\,,\ y_j \geq 0 \ \forall\, j\}$$

$$\widehat{u}_1(x,y) := \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} u_1(i,j)\, x_i\, y_j \qquad \widehat{u}_2(x,y) := \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} u_2(i,j)\, x_i\, y_j$$

Auf Grund der Voraussetzungen erhalten wir $\widehat{u}_1 = -\widehat{u}_2$ und wir setzen $u := \widehat{u}_1$. Mit Hilfe der Auszahlungsmatrix $A := (u_{ij}) = (u_1(i,j)) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ können wir offensichtlich die Funktion $u : \widehat{X} \times \widehat{Y} \mapsto \mathbb{R}$ wie folgt darstellen:

$$u(x,y) = x^T A\, y$$

Für die gemischte Erweiterung $\widehat{\Gamma}_0$ gilt nun eine dem Satz 3.4 entsprechende Aussage.

Satz 3.5 *$\widehat{\Gamma}_0$ sei die gemischte Erweiterung eines Zweipersonen-Nullsummen-Spiels. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) (x^*, y^*) ist ein Nash-Gleichgewicht von $\widehat{\Gamma}_0$.

b) (x^*, y^*) ist ein Sattelpunkt der Funktion u.

c) Es gilt: $\max_x \ \min_y \ u(x,y) = u(x^*, y^*) = \min_y \ \max_x \ u(x,y)$.

Beweis: Man kann den Beweis von Satz 3.4 wörtlich übernehmen, wenn man i durch x, j durch y, i^* durch x^* und j^* durch y^* ersetzt. □

Die gemischte Erweiterung $\widehat{\Gamma}_0$ eines Zweipersonen-Nullsummen-Spiels besitzt nach Korollar 2.1 einen Nash-Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*). Der folgende Satz zeigt nun, dass man durch Lösen eines primal-dualen Paares linearer Optimierungsaufgaben einen solchen Gleichgewichtspunkt berechnen kann. Dazu sei angemerkt, dass wir den Vektor $(1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$ mit 1_k notieren.

Satz 3.6 *$\widehat{\Gamma}_0$ sei die gemischte Erweiterung eines Zweipersonen-Nullsummen-Spiels in der oben gegebenen Notation. Dann ist (x^*, y^*) genau dann ein Nash-Gleichgewicht von $\widehat{\Gamma}_0$, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:*

1. $(x^*, v^*) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ *ist Maximierer der linearen Optimierungsaufgabe:*

$$(LP) \qquad \max\ v \ \ s.d.\ A^T x \geq v\, 1_n\,,\ \ \sum_{i=1}^{p} x_i = 1\ ,\ \ x \geq 0 \tag{3.6}$$

2. $(y^*, w^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *ist Minimierer der linearen Optimierungsaufgabe:*

$$(LD) \qquad \min\ w \ \ s.d.\ A\, y \leq w\, 1_p\,,\ \ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1\ ,\ \ y \geq 0 \tag{3.7}$$

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, dass (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von $\widehat{\Gamma}_0$ ist, d.h. (x^*, y^*) ist ein Sattelpunkt der Funktion $u(x, y) := x^T A\, y$. Es gilt also

$$x^T A\, y^* \ \leq\ (x^*)^T A\, y^* \ \leq\ (x^*)^T A\, y \quad \forall\, x \in \widehat{X}\ \ \forall\, y \in \widehat{Y} \tag{3.8}$$

Wir setzen nun $v^* := (x^*)^T A\, y^* =: w^*$ und zeigen: 1) (x^*, v^*) ist ein Maximierer der Aufgabe (3.6) und 2) (y^*, w^*) ist ein Minimierer der Aufgabe (3.7).
1) Als erstes wird gezeigt, dass (x^*, v^*) zulässig in Bezug auf (3.6) ist. Mit $A_{\cdot j}$ als j-tem Spaltenvektor von A gilt:

$$\begin{aligned}
& v^* \ \leq\ (x^*)^T A\, y \quad && \forall\, y \in \widehat{Y} \\
\Longrightarrow\ & v^* \ \leq\ (x^*)^T A\, e_j \quad && \forall\, j = 1, \ldots, n \\
\Longrightarrow\ & v^* \ \leq\ (x^*)^T A_{\cdot j} \quad && \forall\, j = 1, \ldots, n \\
\Longrightarrow\ & v^* 1_p^T \ \leq\ (x^*)^T A
\end{aligned}$$

Da außerdem $x^* \in \widehat{X}$ ist, erfüllt (x^*, v^*) alle Zulässigkeitsbedingungen von (3.6). Bleibt zu zeigen, dass dieser Punkt auch optimal ist. Wir nehmen an, er sei es nicht. Dann gibt es einen zulässigen Punkt $(\bar{x}, \bar{v})$ mit $\bar{v} > v^*$. Da dieser zulässig ist, gilt: $\bar{x}^T A \geq \bar{v}\ 1_n^T$. Diese Ungleichung multiplizieren wir von rechts mit $y^* \in \widehat{Y}$:

$$\bar{x}^T A y^* \geq \bar{v} 1_n^T y^* = \bar{v} \sum_{j=1}^{n} y_j^* = \bar{v} > v^* = (x^*)^T A\, y^*$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3.8).
2) Zuerst wird die Zulässigkeit von (y^*, w^*) in Bezug auf (3.7) nachgewiesen. Mit $A_{i\cdot}$ wird der i-te Zeilenvektor von A bezeichnet. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& x^T A\, y^* \ \leq w^* \quad && \forall\, x \in \widehat{X} \\
\Longrightarrow\ & e_i^T A\, y^* \ \leq w^* \quad && \forall\, i = 1, \ldots, p \\
\Longrightarrow\ & A_{i\cdot} y^* \leq w^* \quad && \forall\, i = 1, \ldots, p \\
\Longrightarrow\ & A\, y^* \leq w^* 1_p
\end{aligned}$$

Da außerdem $y^* \in \widehat{Y}$ ist, erfüllt (y^*, w^*) alle Zulässigkeitsbedingungen von (3.7). Wir nehmen an, es gebe einen zulässigen Punkt $(\bar{y}, \bar{w})$ mit $\bar{w} < w^*$. Wegen dessen Zulässigkeit gilt: $A\bar{y} \leq \bar{w} 1_p$. Multiplikation dieser Ungleichung von links mit $(x^*)^T$ ergibt:

$$(x^*)^T A\bar{y} \leq \bar{w}\,(x^*)^T\,1_p = \bar{w} \sum_{i=1}^{p} x_i^* = \bar{w} < w^* = (x^*)^T A\,y^*$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3.8).

Seien nun umgekehrt (x^*, v^*) bzw. (y^*, w^*) Optimallösungen von (3.6) bzw. (3.7). Da diese Punkte die Zulässigkeitsbedingungen erfüllen, gelten die Ungleichungen $A\,y^* \leq w^*\,1_p$ und $A^T x^* \geq v^*\,1_n$ mit $v^* = w^*$ (weil die Aufgaben zueinander dual sind). Daraus folgt für beliebiges $x \in \widehat{X}$ und $y \in \widehat{Y}$:

$$x^T A\,y^* \leq w^* x^T\,1_p = w^* = v^* = v^*\,y^T 1_n \leq y^T A^T x^* = (x^*)^T A\,y$$

Ebenso ergibt sich aus

$$w^* = (x^*)^T w^* 1_p \geq (x^*)^T A\,y^* = (y^*)^T A^T\,x^* \geq (y^*)^T v^* 1_n = v^* = w^*$$

auch $v^* = (x^*)^T A\,y^* = w^*$. Damit ist gezeigt, dass gilt:

$$x^T A\,y^* \;\leq\; (x^*)^T A\,y^* \;\leq\; (x^*)^T A\,y \quad \forall\, x \in \widehat{X} \;\; \forall\, y \in \widehat{Y}$$

Diese Ungleichungen besagen aber, dass für $u(x, y)$ die Sattelpunktsbedingung erfüllt ist; also ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht. □

BEMERKUNG: Da die gemischte Erweiterung $\widehat{\Gamma}_0$ eines Zweipersonen-Nullsummen-Spiels ein Nash-Gleichgewicht besitzt, ist das primal-duale Aufgabenpaar aus Satz 3.6 stets lösbar.

Wir betrachten ein kleines Beispiel zu obigem Satz.

Beispiel 3.2 *Gegeben sei ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel* Γ_0 *mit der Auszahlungsmatrix*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Minimax-Methode liefert folgende Ergebnisse:

$$\underline{v}(\Gamma_0) = \max\{0, -1\} = 0\,, \quad \overline{v}(\Gamma_0) := \min\{1, 2\} = 1$$

Dies zeigt, dass Γ_0 kein Nash-Gleichgewicht besitzt.
Die gemischte Erweiterung $\widehat{\Gamma}_0$ besitzt ein Nash-Gleichgewicht, welches wir mit den Aufgaben (3.6) und (3.7) berechnen. Zu lösen sind die folgenden Aufgaben:

$$\left\{\begin{array}{ll}\max & v \\ s.d. & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \\ & x_1 + x_2 = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll}\min & w \\ s.d. & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix} \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & y \geq 0 \end{array}\right.$$

Die beiden Aufgaben sind einfach zu lösen (z.B. auch graphisch: man ersetzt in der ersten Aufgabe die Variable x_2 durch $x_2 = 1 - x_1$ und beachtet, dass dann $0 \leq x_1 \leq 1$ gilt). Als Optimallösungen erhält man:

$$x^* = (0.75, 0.25)^T \ \textit{und} \ y^* = (0.5, 0.5)^T \ \textit{mit} \ v^* = 0.5$$

Auf lange Sicht kann Spieler 1 also einen Gewinn von 0.5 erwarten, wenn er mit 75 % die erste Strategie und mit 25 % die zweite Strategie spielt. Spieler 2 wird auf lange Sicht beide Strategien jeweils mit 50 % spielen, wobei er seinen Verlust auf 0.5 beschränkt. □

3.4 Bi-Matrixspiele und quadratische Programme

Gegeben sei ein endliches Zweipersonen-Spiel in der Notation

$$\Gamma = (\{1, 2\}, X \times Y, (u_1, u_2))$$

mit den Strategiemengen der beiden Spieler

$$X := \{1, \ldots, p\} \quad \text{bzw.} \quad Y := \{1, \ldots, n\}$$

Die Auszahlungsfunktionen der beiden Spieler lassen sich dann mit Hilfe der Matrizen $A := (a_{ij})$ und $B := (b_{ij})$ mit den Elementen

$$a_{ij} := u_1(i, j) \ \text{und} \ b_{ij} := u_2(i, j) \quad \text{mit} \ i = 1, \ldots, p; \ j = 1, \ldots, n$$

beschreiben. Die Existenz eines Nash-Gleichgewichts ist für das Spiel Γ nicht garantiert, weil schon für Zweipersonen-Nullsummen-Spiele kein solcher Punkt existieren muss. Deshalb gehen wir direkt zur gemischten Erweiterung $\widehat{\Gamma}$ über,

dessen Strategiemengen und Auszahlungsfunktionen gegeben sind durch

$$\widehat{X} := \{x \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^{p} x_i = 1\,,\; x_i \geq 0 \;\forall\, i\} \qquad \widehat{Y} := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^{n} y_j = 1\,,\; y_j \geq 0 \;\forall\, j\}$$

$$\widehat{u}_1(x,y) := \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} u_1(i,j)\, x_i\, y_j \qquad \widehat{u}_2(x,y) := \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} u_2(i,j)\, x_i\, y_j$$

Offensichtlich können mit den beiden Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ die Auszahlungsfunktionen in der Form

$$\widehat{u}_1(x,y) = x^T A\, y \;\text{ und }\; \widehat{u}_2(x,y) = x^T B\, y \quad \forall\; x \in \widehat{X} \;\forall\; y \in \widehat{Y} \tag{3.9}$$

geschrieben werden. Endliche Zweipersonen-Spiele werden als **Bi-Matrixspiele**, ihre gemischten Erweiterungen als **Bi-Matrixspiele in gemischten Strategien** bezeichnet.

Unter Verwendung der Beziehungen aus (3.9) ist $(x^*, y^*) \in \widehat{X} \times \widehat{Y}$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht in $\widehat{\Gamma}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} (x^*)^T A\, y^* &\geq x^T A\, y^* \quad \forall\; x \in \widehat{X} \\ (x^*)^T B\, y^* &\geq (x^*)^T B\, y \;\; \forall\; y \in \widehat{Y} \end{aligned}$$

Ist $x^* = e_{i^*} \in \mathbb{R}^p$ und $y^* = e_{j^*} \in \mathbb{R}^n$, so liegt ein Nash-Gleichgewicht (i^*, j^*) in reinen Strategien vor, das wie folgt gekennzeichnet ist:

$$a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*} \;\forall\, i = 1,\ldots,p \quad \wedge \quad b_{i^*j^*} \geq b_{i^*j} \;\forall\, j = 1,\ldots,n$$

Aus den Betrachtungen in Abschnitt 2.3 wissen wir, dass ein Bi-Matrixspiel in gemischten Strategien ein Nash-Gleichgewicht besitzt. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass man ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien finden kann, indem man ein zugehöriges Optimierungsproblem löst. Zugrundegelegt wird folgende quadratische Aufgabe mit linearen Nebenbedingungen:

$$\left\{\begin{array}{rl} \max & x^T A\, y + x^T B\, y - v - w \\ s.d. & A\, y \;\leq\; v 1_p \\ & B^T x \;\leq\; w 1_n \\ & x^T 1_p \;=\; 1 \\ & y^T 1_n \;=\; 1 \\ & x\,,\; y \;\geq\; 0 \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Dabei sind $v, w \in \mathbb{R}$ und es ist $1_k := (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$. Folgender Satz stellt einige wichtige Eigenschaften des Programms (3.10) zusammen.

Satz 3.7 *Sei $z(x,y,v,w) := x^T A\,y + x^T B\,y - v - w$ die Zielfunktion der Aufgabe (3.10). Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) Für alle Vektoren (x,y,v,w), die bezüglich der Aufgabe (3.10) zulässig sind, gilt: $z(x,y,v,w) \leq 0$.

b) Ist (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien, so ist der zugehörige Vektor (x^*,y^*,v^*,w^*) mit $v^* := (x^*)^T A\,y^*$ und $w^* := (x^*)^T B\,y^*$ ein globaler Maximierer der Aufgabe (3.10).

c) Das quadratische Problem (3.10) besitzt stets einen globalen Maximierer und für jeden solchen Punkt $(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{w})$ gilt: $z(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{w}) = 0$.

Beweis:
a) Aus der Zulässigkeit von (x,y,v,w) folgt: $x,y \geq 0$ und $Ay \leq v1_p$, $B^T x \leq w1_n$. Daraus folgt:

$$x^T A\,y \leq v\,x^T 1_p = v \;\text{ und }\; y^T B^T x \leq w\,y^T 1_n = w$$

Damit ergibt sich $z(x,y,v,w) \leq 0$.
b) Sei (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht des Spiels $\widehat{\Gamma}$. Setze $v^* := (x^*)^T A\,y^*$ und $w^* := (x^*)^T B\,y^*$ und zeige zunächst, dass (x^*,y^*,v^*,w^*) ein zulässiger Punkt für (3.10) ist. Da $(x^*,y^*) \in \widehat{X} \times \widehat{Y}$ ist, gilt: $x^*,y^* \geq 0$, $(x^*)^T 1_p = 1$, $(y^*)^T 1_n = 1$. Da (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht ist, folgt:

$$\begin{aligned} & v^* = (x^*)^T A\,y^* \geq x^T A\,y^* \quad \forall\; x \in \widehat{X} \\ \Longrightarrow\quad & v^* \geq e_i^T A\,y^* = A_{i\cdot} y^* \quad \forall\; i = 1,\ldots,p \\ \Longrightarrow\quad & v^* 1_p \geq A\,y^* \end{aligned}$$

Ganz ähnlich zeigt man, dass $B^T x^* \leq w^* 1_n$ gilt. Also ist der Punkt (x^*,y^*,v^*,w^*) zulässig, bleibt zu begründen, dass er sogar optimal ist.
Aus der Definition von v^*, w^* folgt direkt, dass $z(x^*,y^*,v^*,w^*) = 0$ gilt. Da nach Teil a) für alle zulässigen Punkte (x,y,v,w) gilt: $z(x,y,v,w) \leq 0$, ist (x^*,y^*,v^*,w^*) ein absolutes Maximum von (3.10).
c) Bekannt ist, dass die gemischte Erweiterung eines endlichen Spiels ein Nash-Gleichgewicht besitzt. Liegt den Betrachtungen ein Bi-Matrixspiel zugrunde, so ist ein solches Nash-Gleichgewicht nach Teil b) globaler Maximierer der Aufgabe (3.10) mit dem Zielfunktionswert 0. Damit ist die Aussage bewiesen. □

Das Hauptergebnis von Satz 3.7 besagt, dass jedes Nash-Gleichgewicht (x^*,y^*) einen globalen Maximierer (x^*,y^*,v^*,w^*) der Aufgabe (3.10) liefert, wobei $v^* = (x^*)^T A\,y^*$ und $w^* = (x^*)^T B\,y^*$ ist. Im Folgenden soll nun die Umkehrung dieser Aussage begründet werden.

Satz 3.8 *Genau dann ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von $\widehat{\Gamma}$, wenn der Vektor (x^*, y^*, v^*, w^*) ein globaler Maximierer der Aufgabe (3.10) ist.*

BEWEIS: Es genügt also, die Rückrichtung zu beweisen. Sei also (x^*, y^*, v^*, w^*) ein globaler Maximierer der Aufgabe (3.10). Wegen Satz 3.7 ist der Zielfunktionswert für einen solchen Punkt gleich null, woraus folgt:

$$(x^*)^T A\, y^* + (x^*)^T B\, y^* = v^* + w^* \tag{3.11}$$

Da (x^*, y^*, v^*, w^*) den Restriktionen von (3.10) genügt, gilt:

$$\begin{gathered} A\, y^* \;\leq\; v^* 1_p \;,\;\; B^T x^* \;\leq\; w^* 1_n \\ \Rightarrow \;\; (x^*)^T A\, y^* \;\leq\; v^* (x^*)^T 1_p = v^* \;,\;\; (y^*)^T B^T x^* \;\leq\; w^* (y^*)^T 1_n = w^* \end{gathered}$$

Zusammen mit (3.11) ergibt das $v^* = (x^*)^T A\, y^*$ und $w^* = (x^*)^T B\, y^*$.
Sei nun (x, y, v, w) ein beliebiger zulässiger Vektor bezüglich der Aufgabe (3.10). Wegen $A\, y^* \;\leq\; v^* 1_p \;,\;\; B^T x^* \;\leq\; w^* 1_n$ und wegen $x, y \geq 0$, $x^T 1_p = 1, y^T 1_m = 1$ folgt (analog zu oben):

$$x^T A\, y^* \;\leq\; v^* x^T 1_p = v^* \;, \quad y^T B^T x^* \;\leq\; w^* y^T 1_n = w^*$$

Somit gilt aber für beliebiges $(x, y) \in \widehat{X} \times \widehat{Y}$:

$$(x^*)^T A\, y^* \;\geq\; x^T A\, y^* \text{ und } (x^*)^T B\, y^* \;\geq\; (x^*)^T B\, y$$

Also ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von $\widehat{\Gamma}$. $\square$

BEMERKUNG: Ein Nash-Gleichgewicht von Bi-Matrixspielen in gemischten Strategien kann also ermittelt werden, indem man das Optimierungsproblem (3.10) löst. Man beachte aber, dass dieses Problem durchaus lokale Maximierer, die nicht global sind, haben kann. Ein globaler Maximierer ist dadurch gekennzeichnet, dass sein Zielfunktionswert $z(x^*, y^*, v^*, w^*)$ null ist.

Wir erläutern die Ergebnisse dieses Abschnitts mit Hilfe eines Beispiels.

Beispiel 3.3 *Wir ziehen Beispiel 1.2 (Gefangenendilemma) heran. Die Auszahlungsmatrizen der beiden Spieler sind gegeben durch*

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \text{ sowie } B := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige quadratische Programm lautet - wenn wir den nichtlinearen Term in der Zielfunktion mit $x^T(A+B)\,y$ zusammenfassen - wie folgt:

$$\left\{\begin{array}{ll} \max & (x_1,x_2)\begin{pmatrix} -4 & -11 \\ -11 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - v - w \\ s.d. & \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix} \\ & x_1 + x_2 = 1\,,\ \ y_1 + y_2 = 1 \\ & x\,,\ y\ \ge 0 \end{array}\right.$$

Ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ist aus Beispiel 1.2 bekannt, nämlich $x^* = (0,1)^T$ und $y^* = (0,1)^T$, welches den Indizes $i^* = 2$ und $j^* = 2$ entspricht. Man bestätigt leicht, dass (x^*, y^*) zulässig ist mit dem optimalen Zielwert $z^* = 0$. □

Zur Lösung der Optimierungsaufgabe (3.10) gibt es verschiedene Algorithmen. Einige sind in implementierter Form, also als Programme, verfügbar, z.B. unter MATLAB. Zu beachten ist dabei allerdings, dass die Eingabe in einem bestimmten Format erfolgen muss, auf das die Aufgabe (3.10) umgeschrieben werden muss (Näheres dazu in der Vorlesung).

3.5 Bi-Matrixspiele und Lineare Komplementaritätsprobleme (LCP)

In diesem Abschnitt stellen wir einen Zusammenhang her zwischen Bi-Matrixspielen und so genannten linearen Komplementaritätsproblemen, die in der Literatur allgemein mit LCP abgekürzt werden. Bei diesen Problemen handelt es sich - grob gesprochen - um spezielle lineare Gleichungs-/Ungleichungssysteme, die vielfältige Anwendungen in der Mathematik und anderen Gebieten (wie Wirtschaftswissenschaft und Technik) aufweisen. Als Beispiele seien hier freie Randwertprobleme, Gleichgewichtsprobleme aus der Ökonomie und spezielle Probleme der Optimierung genannt. Wir werden zunächst auf die Definition von LCP eingehen und bekannte Probleme der Optimierung als LCP darstellen. Anschließend werden wir zeigen, dass sich das Problem, für Bi-Matrixspiele ein Nash-Gleichgewicht zu finden, als LCP formulieren läßt. Von den zahlreichen Verfahren zur Lösung von LCP werden wir schließlich ein Verfahren entwickeln, das eine Modifikation des klassischen Pivotisierungsverfahrens von Lemke darstellt.

3.5.1 Einführung in LCP

Gegeben seien eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und ein Vektor $q \in \mathbb{R}^p$. Das lineare Komplementaritätsproblem $LCP(M,q)$ besteht darin, Vektoren $z, w \in \mathbb{R}^p$ zu finden, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} w &= M\,z + q \\ z &\geq 0\,,\ w \ \geq\ 0 \\ w^T z &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Bedingungen $z \geq 0$, $w \geq 0$ und $w^T z = 0$ zusammen implizieren

$$z_i w_i = 0 \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,p\}$$

Ist $q \geq 0$, so läst sich das Problem (3.12) trivial durch $z := 0$ und $w := q$ lösen.

Die folgende Menge $\mathcal{F}$, die definiert ist durch

$$\mathcal{F} := \{(z,w) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \,|\, w = Mz + q\,,\ (z,w) \geq 0\}$$

wird zulässiger Bereich des Problems $LCP(M,q)$ genannt. Ein Vektor $(z,w) \in \mathcal{F}$ nennen wir einen zulässigen Punkt. Erfüllt er zusätzlich die Bedingung $z_i\, w_i = 0$ (für alle i), so wird er Lösung von $LCP(M,q)$ genannt.

Für eine Lösung (z,w) des Problems (3.12) gilt also stets $z_i = 0$ oder $w_i = 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,p\}$. Diese Bedingung wird auch Komplementariätsbedingung des Problems genannt. Wir wollen erwähnen, dass das Problem (3.12) auch ohne den Variablenvektor w dargestellt werden kann; eine äquivalente Formulierung lautet:

$$z \geq 0\,,\ \ Mz + q \geq 0\,,\ \ z^T(Mz+q) \geq 0 \tag{3.13}$$

Ob das Problem $LCP(M,q)$ überhaupt lösbar ist, hängt von den Eingangsdaten (M,q) ab. Die Gestalt der Lösungsmenge (diskret, konvex, o.ä.) wird von Eigenschaften der Matrix M beeinflußt (vergl. hierzu C.Kanzow [2]). Das folgende Beispiel macht deutlich, dass bekannte Probleme aus der Optimierung äquivalent als lineare Komplementaritätsprobleme dargestellt werden können.

Beispiel 3.4 *Mit den Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und den Vektoren $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ formulieren wir die folgende quadratische Optimierungsaufgabe:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \\ s.d. & A\,x \leq b\,,\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Mit den Lagrange-Multiplikatoren $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \geq 0, v \geq 0$ und dem Schlupfvektor $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y \geq 0$ sind die KKT-Bedingungen dieses Optimierungsproblems gegeben durch:

$$\begin{array}{rcl} -(Q\,x + c) & = & A^T u - v \\ y + A\,x & = & b \\ u^T y = 0 & , & v^T x = 0 \\ x, y, u, v & \geq & 0 \end{array}$$

Aus der folgenden Umformulierung der KKT-Bedingungen wird ersichtlich, dass ein lineares Komplementaritätsproblem vorliegt:

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} Q & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \\ & & (x^T, u^T) \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ & & (x, u) \geq 0\,, \;\; (v, y) \geq 0 \end{array}$$

Dabei entsprechen sich die folgenden Größen:

$$w = \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix}\,,\; z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}\,,\; M = \begin{pmatrix} Q & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}\,,\; q = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

Mit $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wird die folgende lineare Optimierungsaufgabe betrachtet:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.d. & A\,x \leq b\,,\; x \geq 0 \end{array} \right.$$

Ihre KKT-Bedingungen sind gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \\ & & (x^T, u^T) \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ & & (x, u) \geq 0\,, \;\; (v, y) \geq 0 \end{array}$$

Sie besitzen offensichtlich ebenfalls die Form eines linearen Komplementaritätsproblems. □

3.5.2 Bi-Matrixspiele als LCP

Wir kehren nun zu einem endlichen Zwei-Personenspiel mit den Auszahlungsmatrizen A und B zurück und betrachten dazu die gemischte Erweiterung dieses

Spiels, d.h. ein Bi-Matrixspiel in gemischten Strategien. In diesem Unterabschnitt wird nun ein Zusammenhang eines solchen Spiels zu einem LCP hergestellt. Insbesondere wird sich zeigen, dass sich ein Nash-Gleichgewicht für ein Bi-Matrixspiel in gemischten Strategien durch Lösen eines linearen Komplementaritätsproblems bestimmen läßt. Zunächst leiten wir zwei einfache Resultate her, die wir als Lemmata formulieren.

Das erste Ergebnis zeigt, dass jedes Bi-Matrixspiel in gemischten Strategien strategisch äquivalent ist zu einem Spiel dieses Typs, bei dem die beiden Auszahlungsmatrizen nur positive Einträge aufweisen.

Lemma 3.1 *Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben und sei $E \in \mathbb{R}^{p\times n}$ diejenige Matrix, deren sämtliche Einträge 1 sind. Dann ist (x^*, y^*) genau dann ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien zum Bi-Matrixspiel (A, B), wenn dieser Punkt auch ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien zum Bi-Matrixspiel $(A+\gamma E, B+\gamma E)$ ist.*

Beweis: Sei zunächst (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht für ein Bi-Matrixspiel in gemischten Strategien mit den Auszahlungsmatrizen A, B. Für alle $(x, y) \in \widehat{X}\times\widehat{Y}$ gilt dann:

$$(x^*)^T A\, y^* \geq x^T A\, y^* \text{ und } (x^*)^T B\, y^* \geq (x^*)^T B\, y$$

Für alle $x \in \widehat{X}$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
(x^*)^T(A+\gamma E)\, y^* &= (x^*)^T A\, y^* + \gamma (x^*)^T E\, y^* \\
&= (x^*)^T A\, y^* + \gamma (x^*)^T 1_p \quad (\text{wegen} \quad E\, y^* = 1_p) \\
&= (x^*)^T A\, y^* + \gamma \qquad (\text{wegen} \quad (x^*)^T 1_p = 1) \\
&\geq x^T A\, y^* + \gamma \\
&= x^T A\, y^* + \gamma x^T 1_p \qquad (\text{wegen} \quad x^T 1_p = 1) \\
&= x^T A\, y^* + \gamma x^T E\, y^* \qquad (\text{wegen} \quad E\, y^* = 1_p) \\
&= x^T(A+\gamma E)\, y^*
\end{aligned}$$

Ebenso zeigt man, dass für alle $y \in \widehat{Y}$ gilt:

$$(x^*)^T(A+\gamma E)\, y^* \geq (x^*)^T(A+\gamma E)\, y$$

Damit ist (x^*, y^*) auch ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien zum Bi-Matrixspiel $(A+\gamma E, B+\gamma E)$.
Ist umgekehrt (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien zum Bi-Matrixspiel $(A+\gamma E, B+\gamma E)$, so folgt aus obigen Überlegungen, dass dieser Punkt auch ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn man zu den Auszahlungsmatrizen

$A+\gamma E$, $B+\gamma E$ die Matrix $-\gamma E$ hinzuaddiert. Die Behauptung des Lemmas ist damit bewiesen. $\square$

Wenn man also ein hinreichend großes γ wählt, kann man erreichen, dass die Matrizen $A+\gamma E$, $B+\gamma E$ nur nicht-negative oder sogar nur positive Einträge besitzen. Ohne Einschränkung ist es deshalb zulässig, nur solche Bi-Matrixspiele in gemischten Strategien zu untersuchen, deren Auszahlungsmatrizen A, B nur positive Einträge haben.

Die folgende Aussage bildet die Grundlage dafür, dass wir ein Bi-Matrixspiel in gemischten Strategien als LCP formulieren können.

Lemma 3.2 *Seien $x^* \geq 0$ und $y^* \geq 0$ mit $(x^*)^T 1_p = 1$ und $(y^*)^T 1_n = 1$. Dann ist (x^*, y^*) genau dann ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien, wenn*

$$(x^*)^T A\, y^* 1_p \geq A\, y^* \;\text{ und }\; (x^*)^T B\, y^* 1_n \geq B^T x^* \tag{3.14}$$

gelten.

Beweis: 1) Als erstes gehen wir davon aus, dass (x^*, y^*) mit den angegebenen Eigenschaften ein Nasch-Gleichgewicht ist. Dann gelten für die Auszahlungsmatrix des ersten Spielers folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} & (x^*)^T A\, y^* \geq x^T A\, y^* \quad \forall\ x \in \widehat{X} \\ \Longrightarrow\ & (x^*)^T A\, y^* \geq e_i^T A\, y^* = A_{i\cdot}\, y^* \ \forall\ i = 1, \ldots, p \\ \Longrightarrow\ & (x^*)^T A\, y^* 1_p \geq A\, y^* \end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich für die Matrix B nachstehende Implikationen:

$$\begin{aligned} & (x^*)^T B\, y^* \geq (x^*)^T B\, y \quad \forall\ y \in \widehat{Y} \\ \Longrightarrow\ & (x^*)^T B\, y^* \geq (x^*)^T B\, e_j = (B^T)_{j\cdot}\, x^* \ \forall\ j = 1, \ldots, n \\ \Longrightarrow\ & (x^*)^T B\, y^* 1_n \geq B^T x^* \end{aligned}$$

2) Umgekehrt sei nun die Gültigkeit der Ungleichungen (3.14) vorausgesetzt. Dann erhält man folgende Implikationen, zunächst für die Matrix A:

$$\begin{aligned} & (x^*)^T A\, y^* 1_p \geq A\, y^* \\ \Longrightarrow\ & (x^*)^T A\, y^* x^T 1_p \geq x^T A\, y^* \quad \forall\ x \in \widehat{X} \\ \Longrightarrow\ & (x^*)^T A\, y^* \geq x^T A\, y^* \quad \forall\ x \in \widehat{X} \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für die Matrix B:

$$\begin{aligned} & (x^*)^T B\, y^* 1_n \geq B^T x^* \\ \Longrightarrow\ & (x^*)^T B\, y^* y^T 1_n \geq y^T B^T x^* \quad \forall\ y \in \widehat{Y} \\ \Longrightarrow\ & (x^*)^T B\, y^* \geq (x^*)^T B\, y \quad \forall\ y \in \widehat{Y} \end{aligned}$$

Somit ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht. $\square$

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts, das besagt, dass jedes Bi-Matrixspiel in gemischten Strategien zu einem LCP äquivalent ist. Dabei bezeichnet O_k eine $(k \times k)$-Matrix, deren Einträge sämtlich null sind.

Satz 3.9 *Gegeben sei ein Bi-Matrixspiel mit den Auszahlungsmatrizen A, B, deren Einträge ohne Einschränkung alle positiv seien. Definiere außerdem:*

$$M := \begin{pmatrix} O_p & -A \\ -B^T & O_m \end{pmatrix} \text{ und } q := \begin{pmatrix} 1_p \\ 1_m \end{pmatrix}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien, so ist

$$(\bar{x}, \bar{y}) := \left(\frac{x^*}{(x^*)^T B\, y^*}, \frac{y^*}{(x^*)^T A\, y^*} \right)$$

eine Lösung von LCP(M,q) mit $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$.

b) Ist $(\bar{x}, \bar{y})$ eine Lösung von $LCP(M, q)$ mit $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$, so ist

$$(x^*, y^*) := \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}^T 1_p}, \frac{\bar{y}}{\bar{y}^T 1_n} \right)$$

ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Beweis: a) Sei (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht. Wir setzen $\alpha := (x^*)^T A\, y^*$ und $\beta := (x^*)^T B\, y^*$. Wegen $x^* \geq 0, y^* \geq 0$, $x^* \neq 0, y^* \neq 0$ sowie $A > 0, B > 0$, gilt: $\alpha > 0, \beta > 0$, und der Vektor

$$(\bar{x}, \bar{y}) := \left(\frac{x^*}{\beta}, \frac{y^*}{\alpha} \right)$$

ist wohldefiniert mit $(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$.
Ausgehend von der Aussage des Lemmas 3.2 erhält man folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} (x^*)^T A\, y^* 1_p \geq A\, y^* &\implies \alpha 1_p \geq A\, y^* \implies 1_p \geq A\, \bar{y} \\ (x^*)^T B\, y^* 1_n \geq B^T x^* &\implies \beta 1_n \geq B^T x^* \implies 1_n \geq B^T \bar{x} \end{aligned}$$

Damit ist die Gültigkeit folgender Ungleichung gezeigt:

$$\begin{pmatrix} O_p & -A \\ -B^T & O_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_p \\ 1_m \end{pmatrix} \geq 0 \tag{3.15}$$

Wegen $(x^*)^T A\, y^* = \alpha$ und $(x^*)1_p = 1$ gilt folgende Identität:

$$-\bar{x}^T A\bar{y} + \bar{x}^T 1_p = -\frac{1}{\alpha\beta}(x^*)^T A\, y^* + \frac{1}{\beta}(x^*)^T 1_p = -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} = 0$$

Wegen $(x^*)^T B\, y^* = \beta$ und $(y^*)1_n = 1$ erhält man:

$$-\bar{y}^T B^T \bar{x} + \bar{y}^T 1_n = -\frac{1}{\alpha\beta}(x^*)^T B\, y^* + \frac{1}{\alpha}(y^*)^T 1_n = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = 0$$

Damit ist die Gültigkeit folgender Gleichung nachgewiesen:

$$\left(\bar{x}^T, \bar{y}^T\right)\left[\begin{pmatrix} O_p & -A \\ -B^T & O_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_p \\ 1_m \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{3.16}$$

Wegen $(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ und (3.15),(3.16)ist somit $(\bar{x}, \bar{y})$ nach (3.13) eine Lösung von LCP(M,q).
b) Sei nun umgekehrt $(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ mit $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$ eine Lösung von LCP(M,q). Dann genügt $(\bar{x}, \bar{y})$ den Bedingungen (3.15),(3.16). Daraus folgt, dass dieser Vektor folgendes Gleichungs-/Ungleichunssystem erfüllt:

$$\bar{x} \geq 0 \quad -A\bar{y} + 1_p \geq 0 \quad -\bar{x}^T A\bar{y} + \bar{x}^T 1_p = 0 \tag{3.17}$$
$$\bar{y} \geq 0 \quad -B^T\bar{x} + 1_n \geq 0 \quad -\bar{y}^T B^T \bar{x} + \bar{y}^T 1_n = 0 \tag{3.18}$$

Wegen $\bar{x} \neq 0$ und $\bar{y} \neq 0$ gilt: $\bar{x}^T 1_p > 0$ und $\bar{y}^T 1_n > 0$ und der Vektor

$$(x^*, y^*) := \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}^T 1_p}, \frac{\bar{y}}{\bar{y}^T 1_n}\right)$$

ist wohldefiniert mit $(x^*, y^*) \geq 0$ und $(x^*)^T 1_p = 1$, $(y^*)^T 1_n = 1$.
Aus der Definition von (x^*, y^*) und aus (3.17), (3.18) folgt:

$$\begin{aligned}(x^*)^T A\, y^* 1_p &= \frac{1}{\bar{x}^T 1_p}\frac{1}{\bar{y}^T 1_n}\bar{x}^T A\bar{y} 1_p = \frac{1}{\bar{y}^T 1_n} 1_p \geq \frac{1}{\bar{y}^T 1_n} A\bar{y} = A\, y^* \\ (x^*)^T B\, y^* 1_n &= \frac{1}{\bar{x}^T 1_p}\frac{1}{\bar{y}^T 1_n}\bar{x}^T B\bar{y} 1_n = \frac{1}{\bar{x}^T 1_p} 1_n \geq \frac{1}{\bar{x}^T 1_p} B^T\bar{x} = B^T\, x^*\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist damit nachgewiesen, dass (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien ist. □

Satz 3.9 liefert also einen Ansatz zur Bestimmung eines Nash-Gleichgewichts für Bi-Matrixspiele in gemischten Strategien mittels LCP. Zu bestimmen ist eine Lösung $\bar{z}$ (bzw. $(\bar{z}, \bar{w})$) des folgenden Probelms:

$$z \geq 0\,, \;\; Mz + q \geq 0\,, \;\; z^T(Mz + q) \geq 0$$

oder äquivalent

$$w := Mz + q\,,\ \ w^T z = 0\,,\ \ z \geq 0\,,\ \ w \geq 0 \tag{3.19}$$

wobei M, q, z, w wie folgt gegeben sind mit $m := p + n$:

$$M := \begin{pmatrix} O_p & -A \\ -B^T & O_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m},\ \ q := \begin{pmatrix} 1_p \\ 1_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,\ \ z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,\ \ w \in \mathbb{R}^m$$

Wegen $q \geq 0$ ist $\bar{z} := 0$, $\bar{w} := q$ eine Lösung des LCP (3.19), die wir triviale Lösung nennen. Man benötigt aber nach Satz 3.9 eine solche Lösung $\bar{z}$ mit $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$.

Beispiel 3.5 *Wir erläutern Satz 3.9 an folgendem einfachen Zahlenbeispiel. Betrachtet wird ein Bi-Matrixspiel in gemischten Strategien mit den Auszahlungmatrizen A, B der beiden Spieler wie folgt:*

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \ \textit{und}\ B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ein Nash-Gleichgewicht $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ kann man nach Satz 3.9, Teil b), aus der Lösung $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$ des Problems LCP(M,q) gewinnen, wobei M und q wie folgt gegeben sind:

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad q := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Ermittlung einer Lösung des Problems LCP(M,q) stehen verschiedenen Verfahren zur Verfügung (vgl. Kanzow [2]). Für unser Problem ist aber bereits eine Lösung bekannt, nämlich die triviale. Wir müssen aber eine solche mit $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$ bestimmen. Dieses leistet die Originalversion des Lemke-Verfahrens nicht. Deshalb wird das Lemke-Verfahren diesen Anforderungen entsprechend modifiziert.

3.5.3 Ein modifiziertes Lemke-Verfahren

Bei der Entwicklung des Lösungsverfahrens für die Aufgabe (3.19) legen wir das Gleichungssystems $w - Mz = q$ oder äquivalent

$$(I\,, -M) \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = q \tag{3.20}$$

zugrunde. Die verbleibenden Bedingungen $z \geq 0$, $w \geq 0$, $z^T w = 0$ werden im Verfahren implizit berücksichtigt. Wir verwenden (mit $m = p + n$) die Abkürzungen

$$Q := (I\,, -M) \in \mathbb{R}^{m \times 2m} \text{ und } u := \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$$

Eine Indexmenge $B \subset \{1, \ldots, 2m\}$ mit $|\,B\,| = m$ heißt Basisindexmenge (kurz: BasisIM) zur Matrix Q, wenn die Spaltenvektoren $Q_{\cdot j}$ für $j \in B$ linear unabhängig sind. Ferner setzen wir $N := \{1, \ldots, 2m\} \backslash B$ und nennen (B, N) eine Basisstruktur zu Q. Eine Variable u_j mit $j \in B$ wird Basisvariable, ein u_l mit $l \in N$ Nichtbasisvariable genannt.

Definition 3.2 *Eine Lösung u der Gleichung (3.20) heißt Basislösung zur BasisIM B, wenn $u_l = 0$ ist für alle $l \in N$. Sie heißt zulässig, wenn sie außerdem der Bedingung $u \geq 0$ genügt. Sie wird strikt komplementär genannt, wenn sie die Bedingung $z^T w = 0$ erfüllt.*

Eine zulässige, strikt komplementäre Basislösung von Q ist also eine Lösung von $LCP(M, q)$.

Beispiel 3.6 *Für das Problem (3.19) ist beispielsweise $B := \{1, \ldots, m\}$ eine BasisIM mit $N := \{m + 1, \ldots, m\}$. Setzt man $u_N := z = 0$, $u_B := w = q$, so liegt wegen $q \geq 0$ eine zulässige Basislösung zur BasisIM B vor, die offensichtlich strikt komplementär ist.*

Definition 3.3 *Eine zulässige Basislösung zur BasisIM B heißt fast komplementär, wenn es genau einen Index $s \in \{1, \ldots, 2m\}$ gibt, so dass z_s und w_s Nichtbasisvariable sind.*

Das Gleichungssystem $w - Mz = q$ schreiben wir nun in Form eines verkürzten Tableaus:

	z	r.S.
w	$-M$	q

$$\text{mit } -M := \begin{pmatrix} O_p & A \\ B^T & O_n \end{pmatrix}, q := \begin{pmatrix} 1_p \\ 1_n \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Ohne Einschränkung können wir $A > 0$ und $B > 0$ voraussetzen. Die im Folgenden verwendete Terminologie entspricht der Vorlesung OR II, Lineare Optimierung. Wählt man im Tableau (3.21) eine beliebige Spalte k als Pivotspalte und die Pivotzeile i nach dem Kriterium der Quotientenminimierung des Simplexverfahrens, dann erhält man mit einem Austauschschritt (analog zum Simplexverfahren) zum Pivotindex ik ein Nachfolgetableau, dessen Basislösung zulässig und

fast komplementär ist.

Im Nachfolgetableau gibt es somit genau einen Index s, so dass z_s und w_s Nichtbasisvariable sind. Liegt nun allgemein ein fast komplementäres, zulässiges Tableau vor, das die Nichtbasisvariablen z_s und w_s enthält, so wählt man für den folgenden Austauschschritt die Pivotspalte wie folgt: Diejenige der beiden Variablen z_s bzw. w_s, die zuerst Nichtbasisvariable war, legt die Pivotspalte fest, d.h. tritt beim Austauschschritt in die Basis ein. Die Pivotzeile wird nach der bereits erwähnten Quotientenminimierung bestimmt. Der anschließende Austauschschritt ergibt wieder ein zulässiges Tableau, das zumindest fast komplementär, im günstigeren Falle sogar komplementär ist.

Wir fassen nun die Vorgehensweise in einer algorithmischen Beschreibung zusammen, wobei wir das aktuell im Verfahren geführte Tableau wie folgt bezeichnen:

	u_N	r.S.
u_B	$\bar{M}$	$\bar{q}$

(3.22)

Algorithmus [Modifikation von Lemke]

0) Initialisiere das Tableau (3.22) mit $u_N := z$, $u_B := w$, $\bar{M} := -M$, $\bar{q} := q$. Wähle eine beliebige Spalte k mit $\nu(k) \in N$ als Pivotspalte. Pivotzeile i wird eine Zeile, die der folgenden Bedingung („Quotientenminimierung“) genügt:

$$\frac{\bar{q}_i}{\bar{m}_{ik}} = \min\{\frac{\bar{q}_j}{\bar{m}_{jk}} \mid j \in \{1, \ldots, m\},\ \bar{m}_{jk} > 0\} \tag{3.23}$$

Führe einen Austauschschritt zum Pivot $\bar{m}_{ik}$ aus.

1) Das aktuelle Tableau (3.22) ist zulässig und fast komplementär mit den Variablen z_s und w_s als Nichtbasisvariable. Diejenige der beiden Variablen z_s bzw. w_s, die zuerst Nichtbasisvariable war, legt die Pivotspalte k fest. Bestimme die Pivotzeile i nach der Quotientenminimierung (3.23). Führe einen Austauschschritt zum Pivot $\bar{m}_{ik}$ aus.

2) Erfüllt die Basislösung des neuen Tableaus die Komplementaritätsbedingung, stop. Andernfalls ist diese Lösung fast komplementär. Gehe zu 1). □

Satz 3.10 *Für die Untermatrizen A und B von M gelte: $A > 0$ und $B > 0$. Ferner mögen im Laufe des Verfahrens keine entarteten Tableaus auftreten. Dann ist der Algorithmus [Modifikation von Lemke] wohldefiniert und bricht nach endlich vielen Durchläufen mit einer Lösung $(\bar{z}, \bar{w})$ des LCP (3.19) mit $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$ ab.*

BEWEIS: Das Verfahren ist wohldefiniert, wenn die Quotientenminimierung in den Schritten 1), 2) ausführbar ist. Diese ist genau dann nicht ausführbar, wenn die Indexmenge in (3.23) leer ist. Dies ist der Fall, wenn die Pivotspalte $\bar{M}_{\cdot k} \leq 0$ ist. Daraus würde folgen, dass das Polyeder $\mathcal{F}$ eine unbeschränkte Kante besäße. Nach (3.15) gilt aber für jedes (z, w) aus dem Polyeder $\mathcal{F}$: $x \geq 0$, $B^T x \leq 1_n$, $y \geq 0$, $Ay \leq 1_p$. Damit ist $\mathcal{F}$ wegen $A, B > 0$ beschränkt und kann keine unbeschränkte Kante besitzen.
Zunächst bemerken wir, dass die Matrix $\bar{M}$ nach den Regeln des Austauschschrittes die Blockstruktur von $-M$ beibehält, d.h. es gilt im Laufe des Verfahrens:

$$\bar{M} := \begin{pmatrix} O_p & \bar{A} \\ \bar{B}^T & O_n \end{pmatrix}$$

Wir nehmen nun an, das Verfahren sei nicht endlich. Nach dem ersten Iterationsschritt ist die Wahl des Pivotelements in jedem Schritt eindeutig festgelegt, d.h. nach dem ersten Schritt ist auch die Abfolge der berechneten Basislösungen eindeutig bestimmt. Da es nur endlich viele Tableaus gibt, müssen nach endlich vielen Durchläufen, etwa ab dem $\bar{k}$-ten Tableau, die Tableaus zyklisch durchlaufen werden. Es gibt also eine Zahl $\alpha \in \mathbb{N}$, so dass das $\bar{k}$-te mit dem $(\bar{k} + \alpha)$-ten Tableau übereinstimmt. Da aber das Vorgängertableau des $\bar{k}$-ten Tableaus eindeutig bestimmt ist, müsste sogar das $(\bar{k} - 1)$-te mit dem $(\bar{k} - 1 + \alpha)$-ten Tableau übereinstimmen. Dies widerspricht der Minimalität von $\bar{k}$. Nun folgt aus den Regeln des Austauschschrittes, dass ab dem 3.Tableau stets zwei w-Variable in der Nichtbasis stehen, eine über den Spalten $1, \ldots, p$, die andere über den Spalten $p + 1, \ldots, p + n$. Somit gilt $\bar{k} \geq 3$. Also bricht das Verfahren ab mit einer komplementären Basislösung von $\mathcal{F}$.
Es ist zu begründen, dass diese die Bedingungen $\bar{x} \neq 0$ und $\bar{y} \neq 0$ erfüllt. Im Austausch mit den w-Variablen tritt nach zwei Austauschschritten eine x-Variable und eine y-Variable in die Basis ein (die erste in den „unteren Block“, die andere in den „oberen Block“). Bis zum Abbruch des Verfahrens sind Variablen des jeweiligen Typs in den genannten Blöcken vorhanden. Da die Tableaus nichtentartet sind, ist damit im Abbruchtableau mindestens eine x-Variable und eine y-Variable in der Basislösung ungleich null. □

Beispiel 3.7 *Wir erläutern das Verfahren am Beispiel 3.5. Danach liegt ein Problem LCP(M,q) vor mit*

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad q := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir bilden das Tableau zu $w - Mz = q$ *mit* $z^T := (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ *und* $w^T := (w_1, w_2, w_2, w_4)$*:*

	z_1	z_2	z_3	z_4	
w_1	0	0	2	2	1
w_2	0	0	3	1	1
w_3	(2)	2	0	0	1
w_4	1	5	0	0	1

	w_3	z_2	z_3	z_4	
w_1	0	0	2	2	1
w_2	0	0	(3)	1	1
z_1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$
w_4	$-\frac{1}{2}$	4	0	0	$\frac{1}{2}$

	w_3	z_2	w_2	z_4	
w_1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
z_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z_1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$
w_4	$-\frac{1}{2}$	(4)	0	0	$\frac{1}{2}$

	w_3	w_4	w_2	z_4	
w_1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\left(\frac{4}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$
z_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
z_1	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{8}$
z_2	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$

	w_3	w_4	w_2	w_1	
z_4	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
z_3	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
z_1	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{8}$
z_2	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$

Die Basislösung ist zulässig und komplementär. Also liegt eine Lösung des LCP vor mit:

$\bar{x}_1 = \frac{3}{8}$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{8}$
$\bar{y}_1 = \frac{1}{4}$, $\bar{y}_2 = \frac{1}{4}$

Nach Satz 3.9, Teil b), ist somit $x^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ *und* $y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *ein Nash-Gleichgewicht des Bi-Matrixspiels in gemischen Strategien.*

Beispiel 3.8 *Wir greifen Beispiel 1.2 (Gefangenendilemma) auf, das wir als gemischte Erweiterung betrachten. Wir gehen zu einem strategisch äquivalenten Problem über, indem wir zu den gegebenen Auszahlungsmatrizen die Matrix* $11\,E$ *hinzuaddieren. Die neuen Auszahlungsmatrizen lauten dann:*

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Mit dem Starttableau $w - Mz = q$ erhalten wir damit folgende Tableaufolge:

	z_1	z_2	z_3	z_4	
w_1	0	0	9	1	1
w_2	0	0	10	6	1
w_3	9	1	0	0	1
w_4	(10)	6	0	0	1

	w_4	z_2	z_3	z_4	
w_1	0	0	9	1	1
w_2	0	0	10	(6)	1
w_3	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{44}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$
z_1	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$

	w_4	z_2	z_3	w_2	
w_1	0	0	$\frac{22}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
z_4	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
w_3	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{44}{10}$	0	0	$\frac{1}{10}$
z_1	$\frac{1}{10}$	$\left(\frac{6}{10}\right)$	0	0	$\frac{1}{10}$

	w_4	z_1	z_3	w_2	
w_1	0	0	$\frac{22}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
z_4	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
w_3	$-\frac{1}{6}$	$\frac{22}{3}$	0	0	$\frac{5}{6}$
z_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$

Die letzte Basislösung ist zulässig und komplementär.
Mit $(z_1, z_2, z_3, z_4) := (x_1, x_2, y_1, y_2)$ erhalten wir als Lösung des LCP:
$\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{6}$, $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_2 = \frac{1}{6}$.
Nach Satz 3.9, Teil b), ist somit $x^* = (0, 1)$ und $y^* = (0, 1)$ ein Nash-Gleichgewicht des Bi-Matrixspiels in gemischen Strategien. Dies entspricht dem bereits ermittelten reinen Nash-Gleichgewicht (G, G).

3.6 Weitere Beispiele

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einigen anwendungsorientierten Matrix- und Bimatrixspielen.

Beispiel 3.9 *Eine Firma F produziert ein Gerät, dessen wichtigstes Bauteil ein spezieller Transistor ist. Der Transistor wird von einer Lieferfirma L bezogen und dann in das Gerät eingebaut. Die Lebensdauer des Geräts hängt von diesem Transistor ab. Wird das Gerät innerhalb der Garantiefrist defekt, so muss es auf Kosten der Firma F reparaiert werden; die Reparaturkosten betragen 36 [GE]. Die Lieferfirma L bietet den Transistor in 3 Varianten (Typen) zu unterschiedlichen Preisen und verschiedenen Garantieleistungen an:*

- *Typ I kostet 4 [GE] pro Stück und L übernimmt keine Garantie.*
- *Typ II kostet 24 [GE] pro Stück und L übernimmt die Reparaturkosten bei einem Defekt innerhalt der Garantiefrist.*
- *Typ III kostet 40 [GE] pro Stück. Wird dieser Typ innerhalb der Garantiefrist defekt, so übernimmt L die Reparaturkosten und zahlt zusätzlich 40 [GE] an F aus einer Versicherung, die für diesen Typ speziell abgeschlossen wurde.*

Gefragt ist nach einer Strategie für F, um die Kosten möglichst gering zu halten.

Die Firma F besitzt drei Optionen (Strategien), eine Entscheidung zu treffen: sie kann Typ I, II oder III wählen, wobei für F im Garantiefall die folgenden Kosten anfallen:

$$I : -4 - 36 = -40 , \quad II : -24 , \quad III : -40 + 40 = 0$$

Tritt kein Defekt in der Garantiefrist auf, so entstehen für F die folgenden Kosten:

$$I : -4 ; \quad II : -24 , \quad III : -40$$

Wir formulieren das Problem als Nullsummenspiel, in dem der Zeilenspieler (die Firma F) die Strategien I, II, III zur Verfügung hat, und für den Spaltenspieler (die Natur) die folgenden Möglichkeiten $\{D, nonD\}$ (defekt, nicht defekt) bestehen. Auf diese Weise erhalten wir folgende Auszahlungsmatrix $A := (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} -40 & -4 \\ -24 & -24 \\ 0 & -40 \end{pmatrix}$$

Um ein Nash-Gleichgewicht für F (Zeilenspieler) zu finden, lösen wir die folgende lineare Optimierungsaufgabe gemäß (3.6)

$$\left\{\begin{array}{ll} \max & v \\ s.d. & \begin{pmatrix} -40 & -24 & 0 \\ -4 & -24 & -40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}\right. \tag{3.24}$$

Mit Schlupfvariablen $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ und $w_1 = 0$ ist die Aufgabe (3.24) wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{lll} \max & v & \\ s.d. & y_1 + 40x_1 + 24x_2 + \quad v & = 0 \\ & y_2 + 4x_1 + 24x_2 + 40x_3 + v & = 0 \\ & w_1 + \quad x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 & = 1 \\ & w_1 = 0, y \geq 0, x \geq 0 & \end{array}$$

Die Aufgabe wurde mit einem Linopt-Solver („Handysim“) gelöst; es wurde die folgende Lösung ermittelt: $x_1^* \approx 0.53$, $x_2^* = 0$, $x_3^* \approx 0.47$. Die Lösung empfiehlt also, Typ I in 53 %,Typ III in 47 % der Fälle und Typ II gar nicht einzusetzen. Man beachte, dass sich das Modell (3.24) auch direkt als lineare Optimierungsaufgabe aufstellen läßt.

Beispiel 3.10 *BOING und AIRBUS überlegen, einen neuen Flugzeugtyp zu entwickeln und damit in den Markt einzutreten oder nicht. Die Entwicklungskosten eines neuen Flugzeugtyps sind sehr hoch, beispielsweise entsprechen die Entwicklungskosten des A 380 fast dem gesamten Unternehmenswert. Bei so hohen Entwicklungskosten ist das Projekt nicht profitabel, wenn der Konkurrent gleichzeitig einen ähnlichen Flugzeugtyp entwickelt und damit in denselben Markt für Flugzeuge mit entsprechenden Fluggastkapizitäten eintritt. Die Situation ist in folgendem Schema dargestellt, das die Elemente beider Auszahlungsmatrizen A, B enthält (ME = Markteintritt, kME = kein Markteintritt):*

.		*AIRBUS*	
		ME	*kME*
BOING	*ME*	*-5, -5*	*100, 0*
	kME	*0 , 100*	*0 , 0*

Man kann durch Überprüfen herausfinden, dass die reinen Strategiepaare (ME,kME) bzw. (kME,ME) Nash-Gleichgewichte sind.
Die gemischten Strategien für Boing seien mit (x_1, x_2) (mit $x_1 + x_2 = 1, x_i \geq 0$) und jene für Airbus mit (y_1, y_2) (mit $y_1 + y_2 = 1, y_i \geq 0$) bezeichnet. Wir gehen

zu einem äquivalenten Spiel über, indem wir 10 zu jedem Matrixelement von A und B dazuaddieren. Mit $z := (z_i) := (x_1, x_2, y_1, y_2)$ *lautet dann das Starttableau für den modifizierten Lemke-Algorithmus wie folgt:*

	z_1	z_2	z_3	z_4	
w_1	0	0	5	110	1
w_2	0	0	10	10	1
w_3	5	110	0	0	1
w_4	10	10	0	0	1

Je nach Wahl der Pivotspalte beim Start des Verfahrens erhält man (unter Beachtung von Satz 3.9,b)) als Lösung die reinen Strategien $x^* = (0, 1)$, $y^* = (1, 0)$ *oder* $\bar{x} = (1, 0)$, $\bar{y} = (0, 1)$, *die oben genannten Nash-Gleichgewichten entsprechen.*
Bei einem Neustart ist es aber auch möglich, ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien zu erhalten, nämlich:

$$\widetilde{x} \approx (0.952, 0.048), \quad \widetilde{y} = (0.048, 0.952)$$

Dies bringt die Erwartung zum Ausdruck, dass jeder der beiden Kontrahenten mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % in den Markt eintritt. Diese Wahrscheinlichkeit hängt von den Gewinnen bzw. Verlusten ab, die in der Auszahlungsmatrix enthalten sind. (Man beachte, dass im vorliegenden Fall bei einem vergleichsweise kleinen Verlust Aussichten auf einen großen Gewinn bestehen.)

Beispiel 3.11 *Auch bei diesem Beispiel handelt es sich um ein Markteintrittsspiel (es ist in abgeänderter Form [4] entnommen). Es ist ein Spiel zwischen einem Monopolisten (Spieler 2) und einem potentiellen Konkurrenten (Spieler 1), der die Absicht hat, in den Markt einzutreten. Der Monopolist hat die Wahl, einen Vernichtungskampf zu führen (Option* s_{21}*) oder den Konkurrenten auf dem Markt zu dulden (Option* s_{22}*). Im ersten Fall würden beide Spieler gleich große Verluste erleiden, im zweiten Fall würden sie den Markt teilen. Spieler 1 sind die Optionen des Spielers 2 bekannt. Er hat die Wahl, auf Grund der Androhung eines Vernichtungskampfes auf einen Markeintritt zu verzichten (*s_{11}*) oder in den Markt einzutreten (*s_{12}*). Wir legen das folgende Auszahlungsschema zugrunde:*

		Spieler 2	
		s_{21}	s_{22}
Spieler 1	s_{11}	*0 , 100*	*0 , 100*
	s_{12}	*-10 , -10*	*40 , 40*

Das Tableau ist so zu verstehen, dass es im Falle der Strategie s_{11} („kein Markteintritt“) bei der Androhung eines Vernichtungskampfes bleibt und auch keine Teilung des Marktes eintritt.
Man prüft leicht nach, dass es zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien gibt, nämlich (s_{11}, s_{21}) und (s_{12}, s_{22}). Eine ökonomische Interpretation dieser Gleichgewichte bleicht dem Leser überlassen.

Bemerkung: Wie die Beispiele gezeigt haben, kann ein endliches Zwei-Personenen-Spiel mehrere Nash-Gleichgewichte besitzen. Das angegebene Verfahren findet bei jedem Durchlauf natürlich nur einen Gleichgewichtspunkt. Zu Linearen Komplementaritätsproblemen gibt es eine umfassende Theorie (z.B. über die Struktur der Lösungsmenge) und eine Vielzahl unterschiedlicher Lösungsverfahren. Der Leser sei diesbezüglich auf C. Kanzow [2] verwiesen.

Kapitel 4

Variationsungleichungen (VIP)

Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, dass jedes Zweipersonen-Spiel sowohl äquivalent ist zu einer quadratischen Optimierungsaufgabe wie auch zu einem Linearen Komplementaritätsproblem. In diesem Kapitel legen wir nun allgemeiner ein strategisches Spiel mit m Spielern in der Notation

$$\Gamma = \Big(\{1, \ldots, m\},\ (X^1, \ldots, X^m),\ (u_1, \ldots, u_m)\Big) \tag{4.1}$$

zugrunde. Unser Ziel besteht darin, eine Verbindung von Γ zu einem Variationsungleichungs-Problem (Variational Inequality Problem, kurz: VIP) herzustellen. Auf der Grundlage von Variationsungleichungen werden wir dann einen weiteren Existenzsatz für Nash-Gleichgewichte begründen, der auf anderen Voraussetzungen als jener von Nikaido-Isoda beruht. Von den zahlreichen Verfahren zur Lösung von Variationsungleichungen wird eines vorgestellt und erläutert, wie es sich im spieltheoretischen Sinne nutzen läßt.

4.1 VIP und Nash-Gleichgewichte

Zunächst wird der Begriff „Variationsungleichung“ eingeführt. Anschließend wird eine Verbindung zu wichtigen mathematischen Problemen hergestellt.

Definition 4.1 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und abgeschlossen sowie $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ gegeben. Als Variationsungleichung (variational inequality problem; kurz: $VIP(X, F)$) versteht man das Problem, einen Vektor $x^* \in X$ zu finden, der der Bedingung*

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$$

genügt. Der Vektor x^* heißt dann Lösung der Variationsungleichung $VIP(X, F)$, während X als zulässige Menge von $VIP(X, F)$ bezeichnet wird.

Die folgenden Resultate zeigen, dass sich bei einer geeigneten Wahl der zulässigen Menge X und/oder der Funktion F zahlreiche Probleme als Spezialfall einer Variationsungleichung erweisen. Wir beginnen zunächst mit einem Zusammenhang zwischen nichtlinearen Gleichungssystemen und Variationsungleichungen.

Lemma 4.1 *Betrachte die Variationsungleichung $VIP(X, F)$ mit $X = \mathbb{R}^n$. Dann ist der Vektor $x^* \in X$ genau dann eine Lösung von $VIP(X, F)$, wenn er das Gleichungssystem $F(x) = 0$ löst.*

Beweis: Sei x^* zunächst als Lösung von $VIP(X, F)$ mit $X = \mathbb{R}^n$ vorausgesetzt. Dann gilt $F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Speziell für den Vektor $x := x^* - F(x^*)$ folgt dann:

$$0 \leq F(x^*)^T(x - x^*) = -F(x^*)^T F(x^*) = -\|F(x^*)\|^2$$

Daraus folgt: $F(x^*) = 0$.
Gilt umgekehrt $F(x^*) = 0$, so folgt $F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. □

Bevor wir auf einen weiteren wichtigen Spezialfall von Variationsungleichungen eingehen, verallgemeinern wir den Begriff des „Linearen Komplementaritätsproblems“.

Definition 4.2 *Sei $F : \mathbb{R}^n_+ \mapsto \mathbb{R}^n$ gegeben. Das (nichtlineare) Komplementaritätsproblem besteht darin, einen Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ zu finden, so dass $x = x^*$ dem folgenden System genügt:*

$$x \geq 0,\ F(x) \geq 0,\ x^T F(x) = 0$$

Dieses System wird mit $NCP(F)$ bezeichnet (nonlinear complementary problem). Besitzt $F(x)$ die Form $F(x) := M\,x + q$ mit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $q \in \mathbb{R}^n$, so liegt ein lineares Komplementaritätsproblem vor.

Wir werden zeigen, dass auch Komplementaritätsprobleme als Spezialfall von Variationsungleichungen aufgefasst werden können. Alle Verfahren zur Lösung von Variationsungleichungen können somit auch auf Komplementaritätsprobleme angewendet werden.

Lemma 4.2 *Seien $X = \mathbb{R}^n_+$ und $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$. Dann löst ein Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann die Variationsungleichung $VIP(X, F)$, wenn x^* das Komplementaritätsproblem $NCP(F)$ löst.*

BEWEIS: Sei zunächst $x^* \in X = \mathbb{R}^n_+$ eine Lösung von $VIP(X,F)$, d.h. für alle $x \in X$ gilt: $F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$. Setze speziell den Vektor $x = x^* + e_i$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$. Dann folgt:

$$F(x^*)^T e_i \geq 0 \; \forall \, i \quad \Longleftrightarrow \quad F_i(x^*) \geq 0 \; \forall \, i \quad \Longleftrightarrow \quad F(x^*) \geq 0$$

Damit ist $x^* \geq 0$ und $F(x^*) \geq 0$ gezeigt. Daraus folgt $(x^*)^T F(x^*) \geq 0$.
Annahme: Es gäbe ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ mit $x_i^* F_i(x^*) > 0$. Wähle dann $x := (x_i, x^{*,-i})$ mit $x_i = 0$. Damit erhält man wegen

$$0 > -F_i(x^*)x_i^* = F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$$

einen Widerspruch. Somit gilt auch $F(x^*)^T x^* = 0$ und x^* löst $NCP(F)$.
Sei nun umgekehrt x^* eine Lösung von $NCP(F)$, also $x^* \geq 0$, $F(x^*) \geq 0$, $F(x^*)^T x^* = 0$. Für beliebiges $x \geq 0$ gilt dann:

$$F(x^*)^T(x - x^*) = F(x^*)^T x - F(x^*)^T x^* = F(x^*)^T x \geq 0$$

d.h. x^* ist eine Lösung von $VIP(X,F)$ mit $X = \mathbb{R}^n_+$. □

Als nächstes stellen wir einen Bezug von Variationsungleichungen zu Optimierungsproblemen her. Zu diesem Zweck betrachten wird das folgende Problem:

$$\max f(x) \;\; \text{s.d. } x \in X \tag{4.2}$$

Lemma 4.3 *Seien $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann gelten:*

a) Ist x^* ein lokaler Maximierer von (4.2), so löst x^* die Variationsungleichung $VIP(X,F)$ mit $F = -\nabla f$.

b) Ist f konkav und x^* eine Lösung von $VIP(X,F)$ mit $F = -\nabla f$, so ist x^* ein globaler Maximierer von (4.2).

BEWEIS: a) Sei $x^* \in X$ ein lokaler Maximimierer der Aufgabe (4.2). Da X konvex ist, ist $d := x - x^*$ für beliebiges $x \in X$ eine zulässige Richtung in x^*. Da x^* ein lokaler Maximierer ist, gilt für die Richtungsableitung $\nabla f(x^*)^T d \leq 0$. (Andernfalls würde $f(x^* + t\,d) > f(x^*)$ für hinreichend kleine $t > 0$ gelten und d wäre eine Aufstiegsrichtung in x^*.) Somit gilt $-\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0$ für beliebiges $x \in X$ und x^* ist eine Lösung von $VIP(X,F)$ mit $F = -\nabla f$.
b) Sei nun $x^* \in X$ eine Lösung von $VIP(X,F)$. Dann gilt für alle $x \in X$: $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \leq 0$. Für eine differenzierbare konkave Funktion gilt für jedes Paar $x^*, x \in X$: $f(x) \leq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*)$. Daraus folgt direkt $f(x) \leq f(x^*)$

für beliebiges $x \in X$. Somit ist x^* globaler Maximierer von (4.2). $\square$

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts, wonach unter geeigneten Voraussetzungen ein Nash-Gleichgewicht mit Hilfe von Variationsungleichungen bestimmt werden kann. Dieses Ergebnis ist sowohl von theoretischem Interesse (Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für ein Nash-Gleichgewicht) wie auch von praktischem Nutzen (Verwendung von Verfahren zu Berechnung eines Nash-Gleichgewichts via Variationsungleichungen).

Satz 4.1 *Gegeben sei ein Spiel Γ gemäß (4.1) mit nichtleeren, abgeschlossenen und konvexen Strategiemengen $X^i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ sowie stetig differenzierbaren Auszahlungsfunktionen $u_i : X \mapsto \mathbb{R}$ (mit $X = X^1 \times \ldots \times X^m$) derart, dass $u_i(x^i, x^{-i})$ als Funktion von x^i konkav ist. Dann ist $x^* = (x^{*,1}, \ldots, x^{*,m})$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht von Γ, wenn x^* Lösung der Variationsungleichung $VIP(X, F)$ ist mit*

$$F(x) := - \begin{pmatrix} \nabla_{x^1}\ u_1(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x^m}\ u_m(x) \end{pmatrix}$$

Beweis: Sei $x^* = (x^{*,1}, \ldots, x^{*,m})$ zunächst ein Nash-Gleichgewicht von Γ. Dann ist $x^{*,i}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein Maximierer der Aufgabe

$$\max_{x^i}\ u_i(x^i, x^{*,-i}) \quad \text{s.d. } x^i \in X^i \tag{4.3}$$

Wegen Lemma 4.3 gilt dann $\nabla_{x^i}\ u_i(x^*)^T(x^i - x^{*,i}) \leq 0$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$. Somit:

$$F(x^*)^T(x - x^*) = -\sum_{i=1}^{m} \nabla_{x^i}\ u_i(x^*)^T(x^i - x^{*,i}) \geq 0$$

Also ist x^* eine Lösung von $VIP(X, F)$.
Sei nun umgekehrt x^* als Lösung von $VIP(X, F)$ vorausgesetzt. Dann gilt

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$$

Speziell für einen Vektor der Gestalt

$$x := (x^i, x^{*,-i}) \in X$$

mit einem beliebigen $x^i \in X^i$ folgt hieraus

$$\nabla_{x^i}\ u_i(x^*)^T(x^i - x^{*,i}) \leq 0$$

Wegen der vorausgesetzten Konkavität von $u_i(x^i, x^{*,-i})$ folgt hieraus:

$$u_i(x^i, x^{*,-i}) \leq u_i(x^*) + \nabla_{x^i}\, u_i(x^*)^T(x^i - x^{*,i}) \;\; \forall x^i \in X^i$$

Damit folgt $u_i(x^i, x^{*,-i}) \leq u_i(x^*)$ $(\forall x^i \in X^i)$ und $x^{*,i}$ ist Maximierer von (4.3). Also ist x^* Nash-Gleichgewicht von Γ. $\square$

Beispiel 4.1 *Wir erläutern Satz 4.1 an einem Bi-Matrixspiel Γ in gemischten Strategien. Die Auszahlungsmatrizen in reinen Strategien seien gegeben durch $A, B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, also besitzen die Auszahlungsfunktionen für Γ die Form*

$$\widehat{u}_1(x, y) := x^T A\, y \;\; \textit{und} \;\; \widehat{u}_2(x, y) := x^T B\, y \;\; \textit{mit} \;\; (x, y) \in \widehat{X} \times \widehat{Y}$$

Man prüft nach, dass die Funktionen $\widehat{u}_i : \widehat{X} \times \widehat{Y} \mapsto \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Nun gilt:

$$\nabla_x \widehat{u}_1(x, y) = A\, y \quad \textit{und} \quad \nabla_y \widehat{u}_2(x, y) = B^T x$$

Nach Satz 4.1 ist der Punkt $(x^*, y^*) \in \widehat{X} \times \widehat{Y}$ genau dann ein Nash-Gleichgwicht von Γ, wenn er die angegebene Variationsungleigung erfüllt.
Wegen $F(x^*, y^*)^T = -(y^{*T}A^T, x^{*T}B)$ gelten für beliebiges $(x, y) \in \widehat{X} \times \widehat{Y}$ die folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} & -(y^{*T}A^T, x^{*T}B) \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} \geq 0 \\ \iff \quad & -\begin{pmatrix} x^T A y^* - x^{*T} A y^* \\ x^{*T} B y - x^{*T} B y^* \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt direkt: $x^{*T}Ay^* \geq x^T Ay^*$ und $x^{*T}By^* \geq x^{*T}By$ für alle $(x, y) \in \widehat{X} \times \widehat{Y}$. Dies sind die bekannten Bedingungen für ein Nash-Gleichgewicht bei einem Bi-Matrixspiel in gemischten Strategien. $\square$

Beispiel 4.2 *Wir greifen Beispiel 2.3 (Cournot'sches Oligopol) auf. Danach bringen m konkurrierende Unternehmen ein homogenes Gut auf den Markt. Die Daten für dieses Problem werden nochmals kurz genannt:*

i :	*Unternehmen i mit $i \in \{1, \ldots, m\}$*
x_i :	*die von i hergestellten ME des Produkts*
ξ :	*mit $\xi := \sum_{i=1}^m x_i$, insgesamt auf den Markt gebrachte ME*
$p(\xi)$:	*Marktpreis pro ME bei einem Angebot von ξ ME*
$c_i(x_i)$:	*Produktionskosten von i, wenn x_i ME hergestellt werden.*

Wie in Beispiel 2.3 erhalten wir für jedes Unternehmen i folgende Nutzenfunktion:

$$u_i(x_i) := x_i \cdot p(\xi) - c_i(x_i) \;\; mit \;\; x_i \geq 0$$

Wie bereits erwähnt, werden diese Funktionen als konkav vorausgesetzt. Ferner nehmen wir an, dass sie stetig differenzierbar seien. Nach Satz 4.1 ist das Problem, für diese Aufgabe ein Nash-Gleichgewicht zu finden, äquivalent damit, die Variationsungleichung $VIP(X, F)$ mit $X = \mathbb{R}^m_+$ und der folgenden Funktion F zu lösen:

$$\begin{aligned} F(x) &:= -\begin{pmatrix} \nabla_{x_1} u_1(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x_m} u_m(x) \end{pmatrix} \\ &:= -\begin{pmatrix} p(\xi) + x_1 p'(\xi) - c_1'(x_1) \\ \vdots \\ p(\xi) + x_m p'(\xi) - c_m'(x_m) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei ist $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$. Da in diesem Fall der zulässige Bereich $X^i = \mathbb{R}_+$ für alle i ist, ist nach Lemma 4.2 $VIP(X, F)$ äquivalent zu dem Komplementaritätsproblem $NCP(F)$. □

4.2 Monotone Funktionen

In diesem Abschnitt führen wir die Klasse der monotonen Funktionen ein; grundlegende Eigenschaften dieser Funktionen werden vorgestellt.

Definition 4.3 *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Eine Funktion $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ heißt auf X*

a) monoton, wenn gilt:

$$(x - y)^T (F(x) - F(y)) \geq 0 \;\; \forall \; x, y \in X$$

b) strikt mononton, wenn gilt:

$$(x - y)^T (F(x) - F(y)) > 0 \;\; \forall \; x, y \in X \;,\; x \neq y$$

c) gleichmäßig monoton, wenn es ein $\mu > 0$ gibt mit

$$(x - y)^T (F(x) - F(y)) \geq \mu \|x - y\|^2 \;\; \forall \; x, y \in X$$

Anschaulich versteht man im Fall $n = 1$ unter einer (strikt) monotonen Funktion eine (strikt) monoton wachsende Funktion,während eine (strikt) monoton fallende Funktion keine (strikt) monotone Funktion im Sinne der Definition 4.3 ist.
Offenbar ist jede gleichmäßig monotone Funktion auch strikt monoton und jede strikt monotone Funktion ist monoton, wobei die Umkehrungen dieser Aussagen nicht gelten.
Wir geben als Nächstes einige Beipiele von monotonen Funktionen an.

Beispiel 4.3 *Sei $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Dann gelten:*

a) Die Funktion $F(x) := c$ (c eine beliebige Konstante) ist monoton, aber nicht strikt monoton.

b) Die Funktion $F(x) := x^3$ ist strikt monoton, aber nicht gleichmäßig monoton.

c) Die Funktion $F(x) := x$ ist gleichmäßig monoton.

Die nächste Bemerkung charakterisiert die Klasse der (strikt, gleichmäßigen) monotonen Funktionen im Falle affin-linearer Abbildungen. Der Beweis der folgenden Aussagen wird in der Vorlesung ausgeführt.

Bemerkung: Sei $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ eine affin-lineare Abbildung, d.h. es gilt

$$F(x) := M\,x + q \text{ mit } M \in \mathbb{R}^{n\times n}\,,\ \ q \in \mathbb{R}^n$$

Man kann dann die folgenden Aussagen leicht begründen:

a) F ist monoton $\Longleftrightarrow$ M ist positiv semi-definit.

b) F ist strikt monoton $\Longleftrightarrow$ F ist gleichmäßig monoton $\Longleftrightarrow$ M ist positiv definit.

Als Nächstes charakterisieren wir die (strikt, gleichmäßig) monotonen Funktionen mit Hilfe ihrer Jacobe-Matrizen.

Satz 4.2 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge und $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gelten:*

a) F ist genau dann monoton auf X, wenn $F'(x)$ für alle $x \in X$ positiv semi-definit ist.

b) Ist $F'(x)$ für alle $x \in X$ positiv definit, so ist F strikt monoton auf X.

c) F ist genau dann gleichmäßig monoton auf X, wenn $F'(x)$ gleichmäßig positiv definit auf X ist, d.h. wenn es ein $\mu > 0$ gibt mit

$$d^T F'(x)d \geq \mu \|d\|^2 \tag{4.4}$$

für alle $x \in X$ und für alle $d \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Wir beginnen mit Teil c) des Satzes, und setzen zunächst voraus, dass F gleichmäßig monoton auf X ist. Da F stetig differenzierbar ist, folgt aus der Richtungsdifferenzierbarkeit für beliebiges $d \in \mathbb{R}^n$ und $x \in X$:

$$\begin{aligned} d^T F'(x)d &= d^T \lim_{t\to 0} \frac{F(x+td)-F(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{td^T(F(x+td)-F(x))}{t^2} \\ &\geq \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\mu\|t\,d\|^2 \\ &= \mu\|d\|^2 \end{aligned}$$

Verwendet wurde dabei, dass auf Grund der gleichmäßigen Monotonie für hinreichend kleine t gilt: $td^T(F(x+td)-F(x)) \geq \mu\|td\|^2$.
Sei nun umgekehrt die Ungleichung (4.4) vorausgesetzt. Benutzt wird nun der Mittelwertsatz in der folgenden integralen Form:

$$\Theta(y+h)-\Theta(y) = \int_0^1 \Theta'(y+th)\,h\,dt$$

Damit erhält man dann

$$(x-y)^T(F(x)-F(y)) = \int_0^1 (x-y)^T F'(y+t(x-y))(x-y)\,dt \geq \mu\|x-y\|^2$$

woraus die gleichmäßige Monotonie von F auf X direkt folgt.
Der Beweis von Teil a) erfolgt analog, indem man in obiger Beweisführung einfach $\mu = 0$ setzt.
Zum Beweis von b): Es sei $F'(z)$ positiv definit für alle $z \in X$. Dann ist $\Theta(t) := (x-y)^T F'(y+t(x-y))(x-y) > 0$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und für alle $t \in [0,1]$. Folglich ist

$$(x-y)^T(F(x)-F(y)) = \int_0^1 \Theta(t)\,dt \;>\; 0$$

für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Also ist F strikt monoton. □

Man beachte, dass die Umkehrung der Aussage des Satzes 4.2 b) im Allgemeinen nicht gilt; z.B. ist $F(x) = x^3$ strikt monoton, aber $F'(0) = 0$ ist nicht positiv definit.

Im folgenden soll nun ein Zusammenhang zwischen (strikt, gleichmäßig) konvexen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ und (strikt, gleichmäßig) monotonen Funktionen $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ hergestellt werden. Die grundlegenden Eigenschaften (strikter, gleichmäßiger) konvexer Funktionen setzen wir dabei aus der Vorlesung über Nichtlineare Optimierung als bekannt voraus (s. auch Geiger/Kanzow: Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben, Springer 2002, Abschnitt 2.1).

Satz 4.3 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge und $f : X \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gelten:*

a) f ist genau dann konvex auf X, wenn $\nabla^2 f(x)$ positiv-semidefinit ist für alle $x \in X$.

b) Ist $\nabla^2 f(x)$ positiv definit für alle $x \in X$, so ist f strikt konvex auf X.

c) f ist genau dann gleichmäßig konvex auf X, wenn $\nabla^2 f(x)$ gleichmäßig positiv definit auf X ist.

Auch hier ist die Umkehrung der Aussage b) im Allgemeinen nicht richtig. Die Funktion $f(x) = x^4$ ist strikt konvex auf $\mathbb{R}$, aber $f''(0) = 0$ ist nicht positiv definit.
Da f genau dann (strikt, gleichmäßig) konkav auf X ist, wenn $g := -f$ auf X (strikt, gleichmäßig) konvex ist, gilt eine entsprechende Aussage über konkave Funktionen: Wenn man in Satz 4.3 „konvex“ durch „konkav“ ersetzt, so ist $\nabla^2 f(x)$ durch -$\nabla^2 f(x)$ zu ersetzen.

Als Folgerung aus den Sätzen 4.2 und 4.3 erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen monotonen und konvexen Funktionen.

Korollar 4.1 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge und $f : X \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gelten:*

a) f ist genau dann konvex auf X, wenn ∇f auf X monoton ist.

b) f ist genau dann gleichmäßig konvex auf X, wenn ∇f gleichmäßig monoton auf X ist.

Es gilt auch die Aussage: f ist genau dann streng konvex auf X, wenn ∇f auf X streng monoton ist. Diese Aussage läßt sich aber nicht als Folgerung der beiden zitierten Sätze gewinnen (vgl. das bereits genannte Buch von Geiger/Kanzow).

Da f genau dann (strikt, gleichmäßig) konkav auf X ist, wenn $g := -f$ auf X (strikt, gleichmäßig) konvex ist, gilt eine entsprechende Aussage über konkave Funktionen: Wenn man in Korollar 4.1 „konvex“ durch „konkav“ ersetzt, so ist ∇f durch $-\nabla f$ zu ersetzen.

4.3 Projektionen auf konvexe Mengen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Projektionen auf konvexe Mengen und leiten elementare Eigenschaften von Projektionen her.

Lemma 4.4 *Gegeben seien ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau einen Vektor $z \in X$, so dass gilt:*

$$\|y - z\| = \inf_{x \in X} \|y - x\|$$

Der Vektor z heißt Projektion von y auf die Menge X. Man verwendet dafür die Notation: $z = Proj_X(y)$.

Beweis: Wir betrachten für $f : X \mapsto \mathbb{R}\,, f(x) := \|y - x\|^2$ die folgende Optimierungsaufgabe:

$$\min f(x) \text{ s.d. } x \in X \tag{4.5}$$

Für die erste und zweite Ableitung von f nach x gilt:

$$\nabla f(x) = \nabla \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right) = 2(x - y)\ , \quad \nabla^2 f(x) = 2\, I$$

Da $\nabla^2 f(x)$ positiv definit für alle $x \in X$ ist, ist f streng konvex auf X. f kann also höchstens einen Minimierer in X besitzen. Sei nun x_0 ein Punkt aus $X \neq \emptyset$. Die Aufgabe

$$\min f(x) \text{ s.d. } x \in X\ ,\ \|y - x\| \leq \|y - x_0\| \tag{4.6}$$

besitzt dieselben Minimierer wie Aufgabe (4.5). Da der zulässige Bereich der Aufgabe (4.6) nichtleer und kompakt und f auf X stetig ist, existiert ein Minimierer z, der eindeutig bestimmt ist. □

Die in Lemma 4.4 definierte Abbildung $Proj_X : \mathbb{R}^n \mapsto X$ besitzt offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

$$Proj_X(y) = y\ \forall\ y \in X\ ,\ Proj_X \circ Proj_X = Proj_X$$

Im folgenden Satz, Projektionsatz genannt, gibt eine Charakterisierung der Projektion von y auf X dar.

Satz 4.4 *Gegeben seien ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist z genau dann die Projektion von y auf X, wenn die folgende Bedingung gilt:*

$$(z-y)^T(x-z) \geq 0 \ \forall\, x \in X \tag{4.7}$$

BEWEIS: Sei zunächst z als Projektion von y auf X vorausgesetzt. Wir definieren wieder die Funktion $f(x) := \|y-x\|^2$. Für beliebiges $x \in X$ gilt nun $z+\lambda(x-z) \in X$ für alle $\lambda \in (0,1)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} f(z) &\leq f(z+\lambda(x-z)) \\ &= \|(z-y)+\lambda(x-z)\|^2 \\ &= ((z-y)+\lambda(x-z))^T\,((z-y)+\lambda(x-z)) \\ &= 2\lambda(z-y)^T(x-z) + \|z-y\|^2 + \lambda^2\|x-z\|^2 \end{aligned}$$

Wegen $f(z) = \|z-y\|^2$ folgt daraus: $0 \leq 2\lambda(z-y)^T(x-z) + \lambda^2\|x-z\|^2$. Dividiert man diese Ungleichung durch 2λ und läßt dann λ gegen $0+$ gehen, so folgt: $(z-y)^T(x-z) \geq 0$ für $x \in X$.
Wir setzen nun die Eigenschaft (4.7) voraus, dann gilt für beliebiges $x \in X$:

$$\begin{aligned} 0 &\geq (y-z)^T(x-z) \\ &= (y-z)^T(x-y+y-z) \\ &= \|y-z\|^2 + (y-z)^T(x-y) \\ &\geq \|y-z\|^2 - \|y-z\|\|x-y\| \end{aligned}$$

Daraus folgt: $\|x-y\| \geq \|y-z\|$ für beliebiges $x \in X$, und somit: $z = Proj_X(y)$. □

Der Projektionssatz besagt, dass für $z = Proj_X(y)$ und beliebiges $x \in X$ stets die Ungleichung $(z-y)^T(x-z) \geq 0$ erfüllt ist. Wegen $(z-y)^T(x-z) = \|z-y\|\|x-z\|\cos\varphi$ (φ der von den Vektoren $z-y$ und $x-z$ eingeschlossene Winkel) heißt dies, dass der Winkel zwischen $z-y$ und $x-z$ für alle $x \in X$ zwischen $0°$ und $90°$ liegt.

Als Nächstes zeigen wir, dass der Abstand zweier projizierter Punkte niemals größer sein kann als der Abstand dieser beiden Punkte selbst.

Lemma 4.5 *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$:*

$$\|Proj_X(x) - Proj_X(y)\| \leq \|x-y\|$$

Die Abbildung $x \mapsto Proj_X(x)$ ist also auf $\mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig.

BEWEIS: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} x - y &= Proj_X(x) - Proj_X(y) + (x - Proj_X(x)) + (Proj_X(y) - y) \\ &= Proj_X(x) - Proj_X(y) + u \end{aligned}$$

mit $u := (x - Proj_X(x)) + (Proj_X(y) - y)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|Proj_X(x) - Proj_X(y)\|^2 + \|u\|^2 + 2u^T(Proj_X(x) - Proj_X(y)) \\ &= \|Proj_X(x) - Proj_X(y)\|^2 + \|u\|^2 \\ &\quad +2\,(x - Proj_X(x))^T(Proj_X(x) - Proj_X(y)) \\ &\quad +2\,(Proj_X(y) - y)^T(Proj_X(x) - Proj_X(y)) \end{aligned}$$

Anwendung des Projektionssatzes 4.4 ergibt:

$$\begin{aligned} (x - Proj_X(x))^T(Proj_X(x) - Proj_X(y)) &\geq 0 \\ (Proj_X(y) - y)^T(Proj_X(x) - Proj_X(y)) &\geq 0 \end{aligned}$$

Damit ist insgesamt gezeigt $\|x - y\|^2 \geq \|Proj_X(x) - Proj_X(y)\|^2$ und die Behauptung des Lemmas bewiesen. □

Die Abbildung $x \mapsto Proj_X(x)$ von $\mathbb{R}^n$ nach X ist also nicht expansiv.

4.4 Existenz von Nash-Gleichgewichten via VIP

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen von Lösungen von Variationsungleichungen. Diese Aussagen geben auch Auskunft über die Existenz und über die Struktur von Nash-Gleichgewichten des Spiels Γ, weil nach Satz 4.1 ein strategisches Spiel Γ als Problem $VIP(X, F)$ (mit geeignetem F) äquivalent dargestellt werden kann. Um zu einer ersten Existenzaussage zu gelangen, wollen wir zunächst eine äquivalente Formulierung des Problems $VIP(X, F)$ als Fixpunktproblem angeben.

Satz 4.5 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ sowie $\gamma > 0$. Dann ist $x^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung der Variationsungleichung $VIP(X, F)$, wenn x^* ein Fixpunkt der Abbildung*

$$P : X \mapsto X\,,\ P(x) := Proj_X(x - \gamma F(x))$$

ist, d.h. wenn $x^* = P(x^*)$ gilt.

BEWEIS: Man beachte, dass für jedes $x \in X$ die Projektion $Proj_X(x - \gamma F(x))$ wieder in X liegt, also eine Selbstabbildung der Menge X vorliegt. Es gelten nun folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x^* \text{ löst } VIP(X,F) &\iff F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \; \forall \, x \in X \\ &\iff \gamma F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \; \forall \, x \in X \\ &\iff (x^* - (x^* - \gamma F(x^*)))^T (x - x^*) \geq 0 \; \forall \, x \in X \\ &\iff x^* = Proj_X(x^* - \gamma F(x^*)) = P(x^*) \end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz begründet sich mit dem Projektionssatz 4.4, wobei x^* die Rolle von z und $x^* - \gamma F(x^*)$ jene von y spielt. □

Mit Hilfe des folgenden Fixpunktsatzes von Brouwer kann - unter bestimmten Voraussetzungen - die Existenz von Lösungen für $VIP(X,F)$ begründet werden. Der Fixpunktsatz von Brouwer kann als einfache Folgerung aus dem Fixpunktsatz von Kakutani gewonnen werden.

Satz 4.6 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge sowie $f : X \mapsto X$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x^* \in X$ mit $f(x^*) = x^*$.*

BEWEIS: Wir fassen f als Punkt-Menge-Abbildung auf, indem wir die Abbildung $F : X \mapsto \wp(X), F(x) := \{f(x)\}$ betrachten. Auf Grund der Stetigkeit von f ist die Abbildung F abgeschlossen. Ferner sind die Mengen $F(x)$ nichtleer und konvex. Alle Voraussetzungen des Satzes 2.2 von Kakutani sind somit erfüllt. Also gibt es ein $x^* \in X$ mit $x^* \in F(x^*)$, d.h. $x^* = f(x^*)$. □

Als Folgerung aus den Sätzen 4.5 und 4.6 erhalten wir nun einen ersten Existenzsatz für Lösungen des Problems $VIP(X,F)$, bei dem die Menge X nichtleer, konvex und kompakt vorausgesetzt wird.

Satz 4.7 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge sowie $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig. Dann besitzt die Variationsungleichung $VIP(X,F)$ (mindestens) eine Lösung.*

BEWEIS: Betrachte wieder die Abbildung $P(x) := Proj_X(x - \gamma F(x))$, die als Komposition von zwei stetigen Abbildungen stetig ist. Da P eine Selbstabbildung auf X ist und die übrigen Voraussetzungen des Brouwerschen Satzes 4.6 erfüllt, besitzt die Abbildung einen Fixpunkt $x^* = P(x^*)$. Nach Satz 4.5 ist x^* dann eine Lösung von $VIP(X,F)$. □

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass das Problem $VIP(X, F)$ unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion F genau ein Lösung besitzt. Dazu beginnen wir mit einem einfach zu begründendem Resultat, das besagt, das $VIP(X, F)$ für strikt monotones F höchstens eine Lösung besitzt.

Lemma 4.6 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex und die Funktion $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ strikt monoton. Dann besitzt $VIP(X, F)$ höchstens eine Lösung.*

Beweis: Wir gehen von der Annahme aus, dass $VIP(X, F)$ zwei Lösungen x^1, x^2 besitzt mit $x^1 \neq x^2$. Dann gilt:

$$F(x^1)^T(x - x^1) \geq 0 \ , \quad F(x^2)^T(x - x^2) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$$

Setzt man für $x \in X$ speziell x^2 bzw. x^1 ein, dann folgt:

$$F(x^1)^T(x^2 - x^1) \geq 0 \ , \quad F(x^2)^T(x^1 - x^2) \geq 0$$

Multipliziert man beide Ungleichungen mit (-1) und addiert, so erhält man:

$$\Big(F(x^1) - F(x^2)\Big)^T (x^1 - x^2) \leq 0$$

Da F streng monoton auf X ist, gilt aber andererseits:

$$(x^1 - x^2)^T \Big(F(x^1) - F(x^2)\Big) > 0$$

Wir haben also einen Widerspruch erhalten, und $VIP(X, F)$ kann höchstens eine Lösung besitzen. □

Der Nachweis der Existenz einer Lösung ist etwas schwieriger und bedarf einer weiteren Forderung an das Wachstumsverhalten der Funktion F. Für $r > 0$ definieren wir die Schnittmenge X_r mit

$$X_r := X \cap K_r(0)$$

wobei $K_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$ ist. Ist X nichtleer, abgeschlossen und konvex, so ist für hinreichend großes r auch X_r nichtleer, konvex und kompakt.

Lemma 4.7 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen, konvex sowie $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig. Dann besitzt $VIP(X, F)$ genau dann eine Lösung x^*, wenn es ein $r > \|x^*\|$ gibt, so dass x^* eine Lösung von $VIP(X_r, F)$ ist.*

BEWEIS: Wir setzen zunächst voraus, dass $VIP(X,F)$ eine Lösung x^* besitzt. Wähle dann ein $r > \|x^*\|$ beliebig. Wegen $X_r \subseteq X$ und $x^* \in X_r$ ist dann x^* auch eine Lösung von $VIP(X_r,F)$.
Sei umgekehrt ein $r > 0$ gegeben, so dass $VIP(X_r,F)$ eine Lösung x^* besitzt mit $\|x^*\| < r$. Sei $x \in X$ beliebig. Für hinreichend kleines $\lambda > 0$ ist dann

$$y := x^* + \lambda(x - x^*) \in X_r$$

Da x^* das Problem $VIP(X_r,F)$ löst, folgt:

$$\begin{array}{rl} & F(x^*)^T(y - x^*) \geq 0 \\ \Longrightarrow & \lambda F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \\ \Longrightarrow & F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \end{array}$$

Da $x \in X$ beliebig gewählt ist, ist x^* auch Lösung von $VIP(X,F)$. □

Das folgende Resultat zeigt nun, dass unter einer geeigneten Wachstumsbedingung an die Funktion F die Existenz einer Lösung des Problems $VIP(X,F)$ garantiert werden kann, auch wenn die Menge X nicht beschränkt ist.

Satz 4.8 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen, konvex sowie $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig. Existiert ein $\bar{x} \in X$ mit*

$$\lim_{x \in X,\, \|x\| \to \infty} \frac{(x - \bar{x})^T(F(x) - F(\bar{x}))}{\|x - \bar{x}\|} = \infty \tag{4.8}$$

so besitzt $VIP(X,F)$ (mindestens) eine Lösung.

BEWEIS: Sei μ eine Zahl mit $\mu > \|F(\bar{x}\|$. Wegen (4.8) gibt es eine Zahl $r > \|\bar{x}\|$, so dass gilt:

$$(x - \bar{x})^T(F(x) - F(\bar{x})) > \mu\|x - \bar{x}\| \quad \forall\ x \in X \text{ mit } \|x\| \geq r$$

Damit erhält man für alle $x \in X$ mit $\|x\| \geq r$:

$$\begin{array}{rcl} F(x)^T(x - \bar{x}) & > & \mu\,\|x - \bar{x}\| + F(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \\ & \geq & \mu\,\|x - \bar{x}\| - \|F(\bar{x})\|\,\|(x - \bar{x}\| \\ & = & (\mu - \|F(\bar{x})\|)\,\|(x - \bar{x}\| \\ & = & (\mu - \|F(\bar{x})\|)\,(\|(x\| - \|\bar{x}\|) \\ & > & 0 \end{array} \tag{4.9}$$

Betrachte nun die Menge $X_r := X \cap K_r(0)$, die wegen $\bar{x} \in X_r$ nichtleer ist. Ferner ist sie konvex und kompakt. Nach Satz 4.7 besitzt das Problem $VIP(X_r, F)$ eine Lösung x^*. Wir zeigen nun, dass $\|x^*\| < r$ gelten muss. Es folgt:

$$\begin{aligned} & F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \ \ \forall \ x \in X_r \\ \Longrightarrow \quad & F(x^*)^T(\bar{x} - x^*) \geq 0 \ \ (\text{da } \bar{x} \in X_r) \\ \Longrightarrow \quad & F(x^*)^T(x^* - \bar{x}) \leq 0 \end{aligned}$$

Wegen (4.9) erhält man daher $\|x^*\| < r$. Nach Lemma 4.7 ist damit x^* eine Lösung von $VIP(X, F)$. □

Als Folgerung der obigen Resultate erhalten wir die folgende Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von $VIP(X, F)$ bei einer gleichmäßig monotonen Funktion F.

Satz 4.9 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen, konvex sowie $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig und gleichmäßig monoton. Dann besitzt $VIP(X, F)$ genau eine Lösung.*

Beweis: Da F gleichmäßig monoton ist, gibt es ein $\mu > 0$, so dass gilt:

$$(x - y)^T(F(x) - F(y)) \geq \mu\|x - y\|^2 \ \forall \ x, y \in X$$

Daraus kann man ablesen, dass F der Wachstumsbedingung (4.8) genügt für ein beliebiges $y := \bar{x}$. Wegen Satz 4.8 besitzt $VIP(X, F)$ mindestens eine Lösung. Andererseits ist die gleichmäßig monotone Funktion F insbesondere strikt monoton, so dass $VIP(X, F)$ nach Satz 4.6 höchstens eine Lösung besitzt. Also gibt es genau eine Lösung. □

Wir kombinieren nun die in diesem Abschnitt gewonnenen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen über die Lösungen von $VIP(X, F)$ mit dem Resultat des Satzes 4.1, wonach unter geeigneten Voraussetzungen jede Lösung von $VIP(X, F)$ mit einem Nash-Gleichgewicht des Spiels Γ (gemäß (4.1)) korrespondiert. Auf diese Weise erhält man den folgenden Existenz-/Eindeutigkeitssatz für Nash-Gleichgewichte.

Satz 4.10 *Gegeben sei ein Spiel Γ gemäß (4.1) mit nichtleeren, abgeschlossenen und konvexen Strategiemengen $X^i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ sowie stetig differenzierbaren Auszahlungsfunktionen $u_i : X \mapsto \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Setze*

$$F(x) := -\begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \, u_1(x) \\ \vdots \\ \nabla_{x^m} \, u_m(x) \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Ist F strikt monoton, so existiert höchstens ein Nash-Gleichgewicht.

b) Ist F gleichmäßig monoton, so existiert genau ein Nash-Gleichgewicht.

c) Sind alle Strategiemengen X^i kompakt, so gibt es mindestens ein Nash-Gleichgewicht.

BEWEIS: Unter Berücksichtigung von Satz 4.1 erhält man a) aus Lemma 4.6, b) aus Satz 4.9 und c) aus Satz 4.7. □

BEMERKUNG: Die Voraussetzungen in den Teilen a) und b) des Satzes kann man durch Forderungen ersetzen, die man an die Auszahlungsfunktionen u_i ($i = 1, \ldots, m$) stellt. Es gilt nämlich (vgl. Korollar 4.1 mit Bemerkungen):

- Ist $u_i(x^i, x^{-i})$ eine streng konkave Funktion in der Variablen x^i, so ist $-\nabla_{x_i} u_i(x^i, x^{-i})$ streng monoton in x^i.
- Ist $u_i(x^i, x^{-i})$ eine gleichmäßig konkave Funktion in der Variablen x^i, so ist $-\nabla_{x_i} u_i(x^i, x^{-i})$ gleichmäßig monoton in x^i.

Wegen (4.10) ist dann auch F streng bzw. gleichmäßig monoton auf X.

4.5 Numerische Verfahren

Es gibt zahlreiche Verfahren, die zur Lösung von Nash-Gleichgewichtsproblemen eingesetzt werden können. Dabei können einige dieser Verfahren direkt auf auf die spieltheoretische Formulierung der Probleme angewendet werden, andere dagegen sind auf Variationsungleichungen zugeschnitten. Wir beschränken uns hier auf die Darstellung von zwei relativ einfachen Verfahren, einem Iterationsverfahren nach Jacobi bzw. Gauß-Seidel (direkte Verfahren) und einem Fixpunkt-Verfahren zur Lösung von VIP.

4.5.1 Diagonalisierungsverfahren

Zugrunde gelegt wird ein Spiel in Normalform mit m Spielern, den Strategiemengen X^i und den Auszahlungsfunktionen u_i für den i-ten Spieler. Ein Nash-Gleichgewicht für dieses Spiel zu finden bedeutet, einen Punkt $x^* \in X$ zu ermitteln, der für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\max u_i(x^i, x^{*,-i}) \text{ s.d. } x^i \in X^i$$

Zur Lösung dieser Aufgabe formulieren wir ein Lösungsverfahren (in zwei Varianten), das wegen seiner Ähnlichkeit mit entsprechenden Verfahren zur Lösung

linearer Gleichungssysteme Jacobi- bzw. Gauß-Seidel-Verfahren genannt wird.

Algorithmus 4.1 (*Diagonalisierungsverfahren nach Jacobi*)

0) Wähle Startpunkte $x^{0,i} \in X^i$ für $i = 1, \ldots, m$, setze $x^0 = (x^{0,1}, \ldots, x^{0,m})$ und $k = 0$.

1) Falls x^k ein Nash-Gleichgewicht ist, STOP.

2) Bestimme sukzessive für $i = 1, \ldots, m$ eine Lösung $x^{k+1,i}$ von

$$\max\ u_i(x^i, x^{k,-i}) \text{ s.d. } x^i \in X^i \tag{4.11}$$

3) Setze $x^{k+1} := (x^{k+1,1}, \ldots, x^{k+1,m})$, $k := k + 1$ und gehe zu 1).

Bei jeder Iteration k sind in Schritt 2) m Optimierungsaufgaben zu lösen. Zu maximieren sind jeweils die Funktionen

$$u_i(x^{k,1}, \ldots, x^{k,i-1}, x^i, x^{k,i+1}, \ldots, x^{k,m})$$

wobei x^i über der Menge X^i optimiert wird. Bei der Bearbeitung der i-ten Aufgabe sind aber bereits die neuen Wert $x^{k+1,1}, \ldots, x^{k+1,i-1}$ bekannt. Wenn man diese an Stelle der Werte $x^{k,1}, \ldots, x^{k,i-1}$ verwendet, so entsteht das Diagonalisierungsverfahren nach Gauß-Seidel, das bis auf diese kleine Modifikation ansonsten mit obigem Verfahren übereinstimmt.

Algorithmus 4.2 (*Diagonalisierungsverfahren nach Gauß-Seidel*)

0) Wähle Startpunkte $x^{0,i} \in X^i$ für $i = 1, \ldots, m$, setze $x^0 = (x^{0,1}, \ldots, x^{0,m})$ und $k = 0$.

1) Falls x^k ein Nash-Gleichgewicht ist, STOP.

2) Bestimme sukzessive für $i = 1, \ldots, m$ eine Lösung $x^{k+1,i}$ von

$$\max\ u_i(x^{k+1,1}, \ldots, x^{k+1,i-1}, x^i, x^{k,i+1}, \ldots, x^{k,m}) \text{ s.d. } x^i \in X^i$$

3) Setze $x^{k+1} := (x^{k+1,1}, \ldots, x^{k+1,m})$, $k := k + 1$ und gehe zu 1).

Für Algorithmus 4.1 geben wir folgenden Konvergenzsatz an, der in entsprechender Form (mit analogem Beweis) auch für das Verfahren von Jacobi gilt.

Satz 4.11 *Die Funktionen u_i seien stetig differenzierbar und konkav in x^i für $i = 1, \ldots, m$, die Mengen $X^i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ seien nichtleer, konvex und abgeschlossen, ferner sei $\{x^k\}$ eine durch Algorithmus 4.2 erzeugte Folge. Konvergiert diese gegen ein x^*, so ist x^* ein Nash-Gleichgewicht.*

BEWEIS: Wir zeigen zuerst: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^p$ eine konvexe Menge und $f : D \mapsto \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare, konkave Funktion, so ist x^* genau dann ein (lokaler = globaler) Maximierer von f auf D, wenn die Bedingung

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \leq 0 \quad \forall\, x \in D \tag{4.12}$$

erfüllt ist.
Sei zunächst x^* als Maximierer von f auf D vorausgesetzt. Dann gilt für alle $x \in D$: $f(x) - f(x^*) \leq 0$. Daraus folgt für beliebiges $x \in D$:

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*)}{t} \leq 0$$

Sei nun umgekehrt $\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \leq 0$ für jedes $x \in D$ angenommen. Da f konkav und stetig differenziebar auf D ist, gilt: $f(x) \leq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*)$. Damit gilt aber erst recht $f(x) \leq f(x^*)$ für beliebiges $x \in D$.
Wir betrachten nun das Optimierungsproblem (4.11) in Schritt 2) von Algorithmus 4.1. Als Lösung dieser Aufgabe ist $x^{k+1,i}$ wegen (4.12) durch die Bedingung

$$\nabla_{x_i} u_i(x^{k+1,i}, x^{k,-i})^T(x^i - x^{k+1,i}) \leq 0 \quad \forall\, x^i \in X^i$$

charakterisiert. Da die Folge $\{x^k\}$ gegen x^* konvergiert, erhält man durch Grenzübergang ($k \to \infty$) für jedes i:

$$\nabla_{x_i} u_i(x^{*,i}, x^{*,-i})^T(x^i - x^{*,i}) \leq 0 \quad \forall\, x^i \in X^i$$

Also ist $x^{*,i}$ Maximierer der Aufgabe

$$\max\ u_i(x^i, x^{*,-i}) \text{ s.d. } x^i \in X^i$$

für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ und somit ist x^* ein Nash-Gleichgewicht. □

Man beachte, dass x^* als Konvergenzpunkt (und nicht nur als Häufungspunkt) der Iterationsfolge $\{x^k\}$ vorausgesetzt wird.

4.5.2 Fixpunkt- oder Projektionsverfahren

In Satz 4.5 haben wir festgestellt, dass x^* genau dann eine Lösung von $VIP(X, F)$ ist, wenn x^* eine Fixpunkt der Abbildung

$$P : X \mapsto X\,,\ P(x) := Proj_X(x - \gamma F(x)) \tag{4.13}$$

ist. Dabei ist X eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, F ist eine Funktion von X nach $\mathbb{R}^n$ und $\gamma > 0$. Daher ist es naheliegend, eine

Lösung des Problems $VIP(X, F)$ mit Hilfe eines Fixpunktverfahrens zu ermitteln. Tatsächlich sind zahlreiche Fixpunktverfahren zur Lösung von Variationsungleichungen entwickelt worden. Wir werden in diesem Abschnitt ein einfaches Fixpunktverfahren mit einer Modifikation, für die etwas schwächere Voraussetzungen erforderlich sind vorstellen.

Algorithmus 4.3 (*Fixpunkt- oder Projektionsverfahren*)

0) Wähle $x^0 \in X$, $\gamma > 0$, und setze $k := 0$.

1) Ist x^k Lösung von $VIP(X, F)$, STOP.

2) Berechne x^{k+1} gemäß $x^{k+1} := Proj_X(x^k - \gamma F(x^k))$.

3) Setze $k := k + 1$ und gehe zu Schritt 1).

Der Konvergenzsatz für Algorithmus 4.3 beruht auf dem Fixpunktsatz von Banach, den wir hier in etwas vereinfachter Form (ohne Beweis) wiedergegeben wird.

Satz 4.12 (Fixpunktsatz von Banach)
Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere und abgeschlossene Menge sowie $P : X \mapsto X$ eine kontrahierende Selbstabbildung, d.h. es gibt eine Konstante $\kappa \in (0, 1)$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\|P(x) - P(y)\| \leq \kappa \|x - y\|$$

Dann besitzt P genau einen Fixpunkt x^* in X. Ferner konvergiert jede durch die Vorschrift $x^{k+1} := P(x^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $x^0 \in X$ beliebig erzeugte Folge $\{x^k\}$ gegen diesen Fixpunkt x^*.

Dieser Fixpunktsatz wird nun auf die Abbildung $P(x) := Proj_X(x - \gamma F(x))$ angewandt, wobei die Voraussetzungen an X und F so gestellt werden müssen, dass P eine kontrahierende Selbstabbildung wird.

Satz 4.13 *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen, konvex. Sei ferner $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ gleichmäßig monoton mit der Monotonie-Konstanten $\mu > 0$ sowie Lipschitz-stetig auf X mit der Lipschitz-Konstanten $L > 0$. Sei $\gamma < 2\mu/L^2$. Dann konvergiert die durch den Algorithmus 4.3 erzeugte Folge $\{x^k\}$ gegen die eindeutige Lösung von $VIP(X, F)$.*

Beweis: Wir gehen davon aus, dass Algorithmus 4.3 eine unendliche Folge $\{x^k\}$ erzeugt, also nicht nach endlich vielen Schritten abbricht. Die Menge X genügt offenbar den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes. Ferner ist die

Abbildung P gemäß (4.13) eine Selbstabbildung von X in sich. Wir weisen nach, dass sie unter den angegebenen Bedingungen kontrahierend ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|P(x) - P(y)\|^2 &= \|Proj_X(x - \gamma F(x)) - Proj_X(y - \gamma F(y))\|^2 \\
&\leq \|x - y + \gamma(F(x) - F(y))\|^2 \quad \text{(nach Lemma 4.5)} \\
&= \|x - y\|^2 + \gamma^2 \|F(x) - F(y)\|^2 - 2\gamma(x - y)^T(F(x) - F(y)) \\
&\leq \left(1 + \gamma^2 L^2 - 2\gamma\mu\right) \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

Bei der letzten Abschätzung werden die Voraussetzungen der Funktion F genutzt. Wir setzen nun

$$\kappa := \sqrt{1 + \gamma^2 L^2 - 2\gamma\mu}$$

Wegen $\gamma < 2\mu/L^2$ ist $\kappa \in (0, 1)$, d.h. P ist kontrahierend. Wegen Satz 4.9 besitzt $VIP(X, F)$ genau eine Lösung x^*. Nach Satz 4.12 konvergiert gilt: $x^k \mapsto x^*$. $\square$

Satz 4.13 liegen sehr einschränkende Voraussetzungen zugrunde. Hinzu kommt, dass γ so gewählt werden muss, dass die Bedingung $\gamma < 2\mu/L^2$ erfüllt ist. Dies ist insofern problematisch, weil die Monotonie-Konstante μ und die Lipschitz-Konstante L im Allgemeinen nicht bekannt sind.

Wir geben eine Modifikation von Algorithmus 4.3 an, die mit etwas schwächeren Voraussetzungen auskommt, dafür aber in Schritt 2) zwei Projektionen durchführen muss.

Algorithmus 4.4 (*Extragradientenverfahren*)

0) Wähle $x^0 \in X$, $\gamma > 0$, und setze $k := 0$.

1) Ist x^k Lösung von $VIP(X, F)$, STOP.

2) Berechne

$$\begin{aligned}
y^k &:= Proj_X(x^k - \gamma F(x^k)) \\
x^{k+1} &:= Proj_X(x^k - \gamma F(y^k))
\end{aligned}$$

3) Setze $k := k + 1$ und gehe zu Schritt 1).

Der in Schritt 2) berechnete Hilfsvektor y^k entspricht gerade der nächsten Iterierten x^{k+1} aus Algorithmus 4.3. Wir geben für das Verfahren einen Konvergenzsatz an, verzichten hier aber auf einen Beweis des Satzes. Der Leser sei diesbezüglich auf das Buch von Geiger/Kanzow [5] (Abschnitt 7.2) verwiesen.

Satz 4.14 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen, konvex und $F : X \mapsto \mathbb{R}^n$ monoton und Lipschitz-stetig auf X mit der Lipschitz-Konstanten $L > 0$. Sei ferner $\gamma < 1/L$ und die Lösungsmenge von $VIP(X, F)$ nichtleer. Dann konvergiert die durch den Algorithmus 4.4 erzeugte Folge $\{x^k\}$ gegen eine Lösung von $VIP(X, F)$.*

Im Folgenden soll noch etwas zum Aufwand der beiden zuletzt dargestellten Verfahren gesagt werden. Dieser hängt offensichtlich im Wesentlichen davon ab, wie einfach sich die Berechnung der Projektion eines Vektors $y \in \mathbb{R}^n$ auf die konvexe Menge X gestaltet. Wird X durch Box-Restriktionen beschrieben, also in der Form

$$X := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

mit unteren Schranken $a_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und oberen Schranken $b_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ für $i = 1, \ldots, n$, so läßt sich die Projektion komponentenweise angeben:

$$[Proj_X(y)]_i = \begin{cases} a_i \text{ falls } y_i < a_i \\ y_i \text{ falls } y_i \in [a_i, b_i] \\ b_i \text{ falls } y_i > b_i \end{cases}$$

In diesem Fall ist also die Berechnung der Projektion äußerst einfach und wenig aufwändig. Wird X dagegen durch lineare Restriktionen beschrieben, dann hat man bereits ein quadratisches Problem zu lösen. Entsprechend komplizierter wird die Berechnung im Fall nichtlinearer Restriktion, was als zu aufwändig angesehen wird.

Es gibt eine Vielzahl von Verfahren zur Lösung von Variationsungleichungen. Der Leser sei diesbezüglich auf das Vorlesungsskript von C.Kanzow (s. [1]) und auf das Buch von C.Geiger/C.Kanzow, Kapitel 7, (s. [5]) verwiesen. Neue Verfahren zur Lösung von Variationsungleichungen werden auch in den im Literaturverzeichnis aufgeführten und von mir betreuten Masterthesen vorgestellt.

Beispiel 4.4 *Das folgende Beispiel ist dem Skript [1] entnommen. Dabei wird das Oligopolmodell aus Beispiel 4.2 mit der Nutzenfunktion*

$$u_i(x_i) := x_i \cdot p(\xi) - c_i(x_i) \;\; mit \;\; x_i \geq 0$$

für das Unternehmen i (mit $i \in \{1, \ldots, m\}$) zugrunde gelegt.
Die Kostenfunktion sei nun definiert durch

$$c_i(x_i) := c_i x_i + \frac{\beta_i}{1 + \beta_i} L_i^{-1/\beta_i} x_i^{\frac{1+\beta_i}{\beta_i}}$$

während die inverse Nachfragefunktion gegeben ist durch

$$p(\xi) := (\alpha/\xi)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Speziell wurden folgende Zahlen gewählt: $m = 5$, $\alpha := 5000$, $\gamma := 1.1$. *Die Parameter* c_i, β_i *und* L_i *sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.*

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
c_i	*10*	*8*	*6*	*4*	*2*
β_i	*1.2*	*1.1*	*1.0*	*0.9*	*0.8*
L_i	*5*	*5*	*5*	*5*	*5*

Das Zahlenbeispiel wurde mit den Algorithmen 4.1 und 4.2 bearbeitet, wobei als Startvektor $x^0 := (10, \ldots, 10)$ *und als Abbruchkriterium* $\|x^{k+1} - x^k\| \leq 10^{-5}$ *benutzt worden sind. Benötigt wurden dabei 34 bzw. 20 Iteration. Als Lösungsvektor wurde* $x^* \approx (36.93, 41.82, 43.71, 42.66, 38.18)^T$ *gefunden.*
In der Masterthesis [7] wurde die Aufgabe mit verschiedenen anderen Verfahren, auf die hier nicht eingegangen wird, bearbeitet, wobei die niedrigste Anzahl der Iterationen bei 8 lag.

Kapitel 5

Spiele in Extensivform

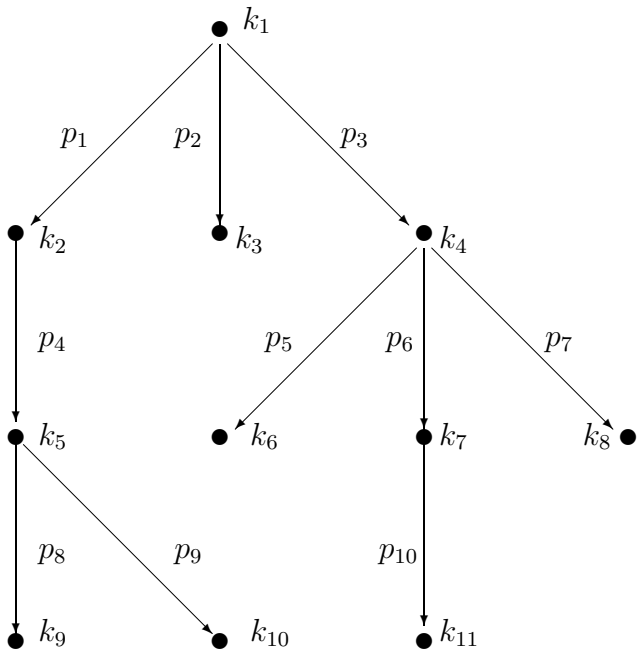
Bisher haben wir strategische Spiele in Normalform behandelt. Es werden nun Spiele betrachtet, die als Folge von Spielzügen gegeben sind, die in einer gewissen Reihenfolge von m Spielern gemacht werden. Spiele dieses Typs werden Spiele in Extensivform genannt, wobei sich zeigen wird, dass sie in Normalform überführt werden können. Besondere Eigenschaften, die die Extensivform aufweist, gehen dabei möglicherweise verloren. Die Unterscheidung zwischen beiden Arten besteht also nicht darin, dass eine völlig neue Klasse vorliegt, sondern in der Art, wie die Spiele dargestellt werden. Die Normalform liefert eher eine statische Beschreibung eines Spiels, wogegen die Extensivform zusätzliche Eigenschaften wie die Zugfolge oder den Informationsstand der Spieler in der Darstellung berücksichtigt. Die Grundstruktur eines Spiels in Extensivform besitzt die Form eines (gerichteten) Wurzelbaumes, ein Begriff, der aus den Grundvorlesungen bekannt ist. Wir beschränken uns hier auf eine knappe Beschreibung jener graphentheoretischer Grundbegriffe, die im Folgenden gebraucht werden.

5.1 Definition und Beispiele

Gegeben sei ein gerichteter Baum $\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P})$ mit der Knotenmenge $\mathcal{K} := \{k_1, \ldots, k_s\}$ und der Pfeilmenge $\mathcal{P}$. Jeder Pfeil (gerichtete Kante) $p \in \mathcal{P}$ kann mit Hilfe von zwei geeigneten Knoten $k_l, k_j \in \mathcal{K}$ als Paar $p = (k_l, k_j)$ dargestellt werden. k_l wird Anfangsknoten, k_j Endknoten von p genannt. Ein Knoten k_l heißt Vorgänger (oder Vater) von k_j (und entsprechend: k_j Nachfolger (oder Sohn) von k_l), wenn es ein $p \in \mathcal{P}$ gibt mit $p = (k_l, k_j)$. Die Menge aller Nachfolgeknoten (Söhne) eines Knotens k wird mit $\mathcal{N}(k)$, die Menge aller Pfeile $p = (k, k')$ mit $k' \in \mathcal{N}(k)$ mit $\mathcal{Z}(k)$ notiert. $\mathcal{Z}(k)$ umfaßt also alle Pfeile p mit Anfangsknoten k. Wir nennen $\mathcal{Z}(k)$ auch Vorwärtsstern von k. Eine Folge $k_{l_0}, (k_{l_0}, k_{l_1}), k_{l_1}, \ldots, k_{l_{q-1}}, (k_{l_{q-1}}, k_{l_q}), k_{l_q}$ von Knoten und Pfeilen heißt Weg mit Anfangsknoten k_{l_0} und Endknoten k_{l_q}

(kurz: Weg von k_{l_0} nach k_{l_q}). Ein Weg $\mathcal{W}$ wird häufig mit dem Symbol $[p_{j_0}, \ldots, p_{j_r}]$, der Folge der durchlaufenen Pfeile, angegeben.

Ein gerichteter Baum $\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P}) =: \vec{T}$ wird Wurzelbaum mit Wurzel k_1 genannt, wenn k_1 keinen Vorgänger und jeder andere Knoten $k \in \mathcal{K}$, $k \neq k_1$, genau einen Vorgänger in $\vec{T}$ besitzt. Ein Knoten k heißt finaler Knoten (oder Blatt) in $\vec{T}$, wenn er keinen Nachfolger hat. Die Menge der finalen Knoten bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$. In einem Wurzelbaum gibt es für jeden Knoten k mit $k \neq k_1$ genau einen Weg $\mathcal{W}$ mit Anfangsknoten k_1 und Endknoten k. Einen solchen Weg bezeichnen wir mit $\mathcal{W}(k_1, k)$. Die Anzahl der Pfeile $r := |\mathcal{W}(k_1, k)|$ heißt Tiefe oder Stufe des Knotens k im Baum $\vec{T}$. k_1 ist ein Knoten der Stufe 0, jeder Nachfolger k von k_1 ist ein Knoten der Stufe 1, jeder Nachfolger eines solchen Nachfolgers ist ein Knoten der Stufe 2, usw.



In den folgenden anschaulichen Darstellungen sind die Knoten und Pfeile eines Wurzelbaumes stets wie in obiger Skizze durchnummeriert (in der natürlichen Reihenfolge „von oben nach unten, von links nach rechts“), ohne dass diese Numerierung explizit angegeben wird. Der Wurzelknoten (hier k_1) wird stets an die „Spitze“ des Baumes gesetzt. Auf eine Kennzeichnung der Pfeilrichtung kann verzichtet werden, weil alle Pfeile „weg vom Wurzelknoten“ orientiert sind.

Die Menge der Spieler (oder Akteure) wird wieder mit $\mathcal{A} := \{1, \ldots, m\}$ bezeichnet. Um Zufallseinflüsse modellieren zu können, wird ein zusätzlicher Spieler („Zufallsspieler"), der die Nummer „0" trägt, eingeführt. Jeder Spieler $i \in \mathcal{A}$ wird eigentlicher Spieler genannt. Die Menge der Entscheidungen (Aktionen) der Spieler wird mit $\mathcal{S}$ bezeichnet. $\mathcal{S}$ sei endlich.

Definition 5.1 *Gegeben seien ein Wurzelbaum $\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P})$, eine Menge $\mathcal{A}$ von m Spielern und eine Menge $\mathcal{S}$ von Aktionen. Falls Abbildungen*

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathcal{K}\backslash\mathcal{F} \mapsto \mathcal{A} \cup \{0\} \quad \text{mit } \mathcal{A} \subseteq \varphi(\mathcal{K}\backslash\mathcal{F}) \\ \nu &: \mathcal{P} \mapsto \mathcal{S} \end{aligned}$$

definiert sind, wird das Tripel $(\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P}), \mathcal{A}, \mathcal{S})$ ein Spielbaum genannt.

In einem Spielbaum ist also jedem Knoten k ein Spieler $i = \varphi(k)$ und jedem Pfeil eine Entscheidung (Aktion) $s := \nu(p)$ zugeordnet. p heißt dann Träger von s, was wir mit $Tr(s) = p$ notieren. Für $i = \varphi(k)$ mit $k \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{F}$ stellt die Menge $\nu(\mathcal{Z}(k))$ die Menge der Aktionen (potenziellen Entscheidungen) von i am Entscheidungsknoten k dar. Ist $\mathcal{W}(k_1, k) = [p_{l_0}, \ldots, p_{l_t}]$ ein Weg (von k_1 nach k), so wird die Entscheidungsfolge $[\nu(p_{l_0}), \ldots, \nu(p_{l_t})]$ ein Spielverlauf (oder eine Spielhistorie) genannt. Die Menge

$$\varphi^{-1}(i) := \{k \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{F} \,|\, \varphi(k) = i\}$$

bezeichnet die Menge der Knoten, die dem Spieler i zugeordnet ist.

Definition 5.2 *Ein 6-Tupel $G := \left(\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P}), \mathcal{A}, \mathcal{S}, (\omega)_{k\,:\,\varphi(k)=0}, (\mathcal{I}^i)_{i=0,\ldots m}, u^e\right)$ heißt Spiel in extensiver Form, wenn*

a) $(\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P}), \mathcal{A}, \mathcal{S})$ ein Spielbaum gemäß Definition 5.1 ist,

b) $(\omega)_k$ mit $\varphi(k) = 0$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Kantenmenge $\mathcal{Z}(k)$ ist,

c) $\mathcal{I}^i := (I^i_1, \ldots, I^i_{j_i})$ eine Zerlegung der dem Spieler i zugeordneten Knotenmenge $\varphi^{-1}(i)$ $(i \in \{0, \ldots, m\})$ ist, wobei für $k, k' \in I^i_l$ gelten soll: $\nu(\mathcal{Z}(k)) = \nu(\mathcal{Z}(k'))$.

d) $u^e : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}^m$ eine Auszahlungsfunktion ist, bei der jede Komponente $u^e(k)_i$ des Vektors $u^e(k)$ die Auszahlung des Spielers i am finalen Knoten k angibt.

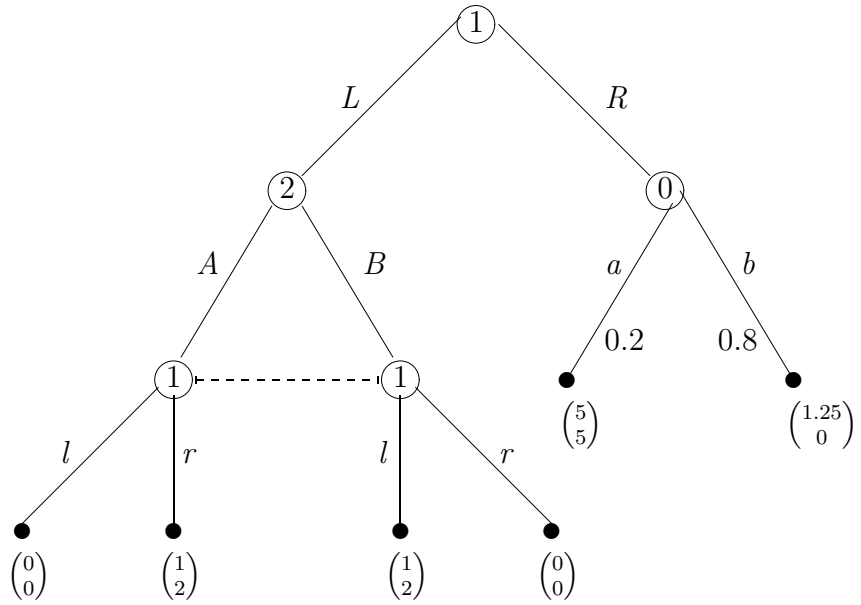
Erläuterungen:

b) An einem Knoten k, der dem Zufallsspieler „0" zugeordnet ist, gibt es auf der Menge $\mathcal{Z}(k)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die ausdrückt, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Aktion („Entscheidung") $\nu(p)$ mit $p \in \mathcal{Z}(k)$ eintritt.

c) Es wird also eine Zerlegung der Knotenmenge $\varphi^{-1}(i)$ (= dem Spieler i entsprechende Knotenmenge) angegeben: $\varphi^{-1}(i) = I_1^i \cup \ldots \cup I_{j_i}^i$. Besteht I_l^i aus mehreren Knoten, z.B. $I_l^i := \{k, k', k''\}$, so kann i nicht unterscheiden, an welchem dieser drei Knoten er sich in der aktuellen Spielsituation befindet, d.h. er kennt den Spielverlauf bis zu diesem Knoten nicht vollständig. (Die Mengen I_l^i werden Informationmengen genannt.)
Die Menge der (möglichen) Aktionen $\nu(\mathcal{Z}(k))$ ist aber für jeden Knoten $k \in I_i^l$ gleich. (Im Sinne einer allgemeineren Modelbildung ließe sich diese Forderung aber durch Angabe der Menge der verfügbaren Aktionen an der Informationsmenge I_i^l ersetzen.)

d) Der Index „e“ in u^e besagt, dass es sich um eine (vektorwertige) Auszahlungsfunktion für ein extensives Spiel handelt.

Beispiel 5.1 *Wir erläutern die Definition anschaulich an folgendem Wurzelbaum:*



Die Informationsmengen seien gegeben durch:

$$\mathcal{I}^1 := \{\{k_1\}, \{k_4, k_5\}\}, \mathcal{I}^2 := \{\{k_2\}\}$$

Die Skizze ist wie folgt zu interpretieren: Das Spiel wird von Spieler 1 eröffnet. Er kann sich für L oder R entscheiden. Nach der Entscheidung L kommt Spieler

2 zum Zug, nach R kommt eine zufällige Entscheidung a oder b zustande, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % bzw. 80 % eintritt. Die strichlierte Linie in Stufe 3, die die Knoten k_4 und k_5 verbindet, besagt, dass Spieler 2 nicht weiß, ob der vorausgehende Spielverlauf (L, A) oder (L, B) war. Die finalen Knoten k_6 bis k_{11} stellen das Spielende eines möglichen Spielverlaufs dar. Die Vektoren an diesen Knoten geben die Auszahlungen für Spieler 1 und 2 wieder.

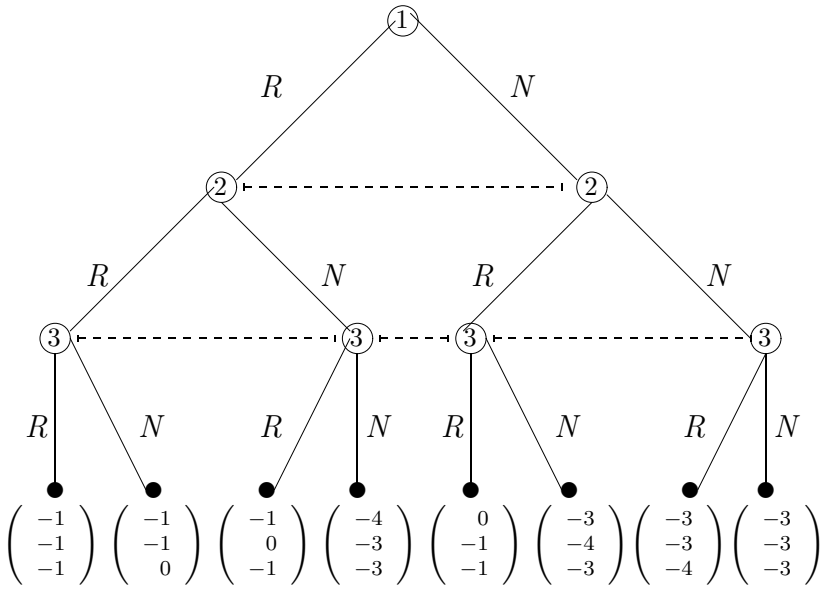
Bemerkung: Am Knoten k_3 entscheidet der Zufall mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,2$ bzw. $0,8$, ob a oder b eintritt, d.h. er entscheidet lediglich darüber, welche Auszahlung stattfindet. Wenn man rationales Handeln der eigentlichen Spieler voraussetzt, kann man den Spielbaum in diesm Fall um die finalen Knoten k_6 und k_7 sowie die Pfeile p_5 und p_6 verkürzen. k_3 wird dann finaler Knoten mit dem Auszahlungvektor (Erwartungswert) $(2,1)^T$ $(= 0.2(5,5)^T + 0.8(1.25,0)^T)$. □

Im Folgenden können wir also ohne Einschränkung **voraussetzen**, dass es keinen Knoten k mit $\varphi(k) = 0$ gibt, dessen sämtliche Nachfolger finale Knoten sind. (Andernfalls kann man den Spielbaum verkürzen.)

Definition 5.3 *Ein Spiel $G := \left(\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P}), \mathcal{A}, \mathcal{S}, (\omega)_{k\,:\,\varphi(k)=0}, (\mathcal{I}^i)_{i=0,\dots m}, u^e\right)$ heißt extensives Spiel mit perfekter Information, falls für jedes i alle Elemente von $\mathcal{I}_i$ einelementige Mengen sind. Andernfalls spricht man von einem Spiel ohne perfekte Information.*

Das Spiel des Beispiels 5.1 ist somit ein Spiel mit nicht perfekter Information. Ein weiteres Beispiel dieser Art ist folgendes Spiel, bei dem alle Spieler gleichzeitig entscheiden können.

Beispiel 5.2 *Drei Chemiefirmen verwenden das Wasser einer natürlichen Resource zur Produktion. Jede Firma hat zwei Strategien, nämlich ihr Abwasser zu reinigen (Strategie R, Kosten 1 GE) oder das Abwasser nicht gereinigt zurückfließen zu lassen (Strategie N, keine Kosten). Die örtlichen Gegebenheiten sind aber nun so, dass das ungereinigte Abwasser einer Firma keinen merkbaren Schaden anrichtet, wenn jedoch mindestens zwei Firmen ihr Abwasser ungereinigt zurückfließen lassen, dann schadet dies der Produktion aller drei Firmen. In diesem Fall muß die natürliche Resource total gereinigt werden und für jede Firma entstehen zusätzlich 3 GE an Kosten. Wir stellen die Situation anschaulich in einem Wurzelbaum dar:*



Die strichlierten Linien zwischen Knoten besagen wieder, dass den Spielern der entsprechenden Knoten vorangehende Spielabläufe nicht bekannt sind („der Spieler $i = 3$ weiß nicht, ob die Spielabläufe (R,R), (R,N), (N,R), (N,N) vorangegangen sind“). □

5.2 Spiele mit perfekter Information

Extensive Spiele mit perfekter Information können auch abgekürtzt dargestellt werden durch

$$G := \left(\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P}), \mathcal{A}, \mathcal{S}, (\omega)_{k\,:\,\varphi(k)=0}, u^e\right)$$

da die Informationspartitionen nur einelementige Mengen enthalten.

Definition 5.4 *Sei* $G := \left(\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P}), \mathcal{A}, \mathcal{S}, (\omega)_{k\,:\,\varphi(k)=0}, u^e\right)$ *ein extensives Spiel mit perfekter Information. Als (reine) Strategie des Spielers* i *mit* $i \in \mathcal{A} \cup \{0\}$ *versteht man jedes Element* x^i *aus der Menge*

$$X^i := \prod_{k \in \varphi^{-1}(i)} \nu(\mathcal{Z}(k)) \in \mathbb{R}^{n_i} \tag{5.1}$$

Dabei ist $n_i := |\varphi^{-1}(i)|$, *ferner sei* $x^i := (x^i_1, \ldots, x^i_{n_i})$.

Für $(x^0, x) := (x^0, x^1, \ldots, x^m) \in X^0 \times X^1 \times \ldots \times X^m$ wird nun die Pfeilmenge

$$\mathcal{P}(x^0, x) := \{Tr(x^i_j) \,|\, j = 1, \ldots, n_i; i = 0, 1, \ldots, m\}$$

betrachtet. Sie besitzt wegen (5.3) die folgende Eigenschaft: zu jedem $k \in \mathcal{K}$ gibt es genau einen Pfeil $p = Tr(x_j^i) \in \mathcal{P}(x^0, x)$ mit $p \in \mathcal{Z}(k)$. Für eine Menge mit dieser Eigenschaft läßt sich leicht nachweisen (Induktion über die Anzahl der Knoten), dass sie genau eine Teilmenge $\{p_{j_1}, \ldots, p_{j_r}\}$ besitzt, die einen Weg $\mathcal{W}(k_1, k_f)$ vom Wurzelknoten k_1 zu einem finalen Knoten k_f beschreiben. Ist keine der zugehörigen Entscheidungen $\nu(p_{j_l})$ eine Zufallsentscheidung, so wird für jeden eigentlichen Spieler i eine Auszahlungsfunktion festgelegt durch

$$u_i : X = X^1 \times \ldots \times X^m \mapsto \mathbb{R}\,, \;\; u_i(x) := u^e(k_f)_i \tag{5.2}$$

Sind Zufallsentscheidungen dabei, so ist $u^e(k_f)_i$ mit den Wahrscheinlichkeiten $pr(\nu(p_{j_l})$ jener Pfeile p_{j_l}, die auf dem Weg von k_1 nach k_f liegen und Zufallentscheidungen markieren, zu multiplizieren.

Definition 5.5 *Gegeben sei ein Spiel G in extensiver Form mit der Spielermenge $\mathcal{A}$. Die Strategiemenge X^i und die Auszahlungsfunktion u_i seien für $i \in \mathcal{A}$ gemäß (5.3) bzw. (5.2) definiert. Dann heißt $\Gamma|_G := (\mathcal{A}, X, (u_i))$ das von G induzierte Spiel in Normalform.*

Beispiel 5.3 *Wir ändern Beispiel 5.1 zu einem Spiel mit perfekter Information ab, d.h. die strichlierte Linie zwischen den Knoten k_4 und k_5 seien entfernt. Spieler 1 kann an den Knoten k_1, k_4, k_5 entscheiden. Seine Strategiemenge lautet:*

$$\begin{aligned} X^1 &= \nu(\mathcal{Z}(k_1)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_4)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_5)) \\ &= \{(L,l,l),(L,l,r),(L,r,l),(L,r,r),(R,l,l),(R,l,r),(R,r,l),(R,r,r)\} \end{aligned}$$

Spieler 2 ist nur ein Knoten, nämlich k_2, zugeordnet. Seine Strategiemenge ist gegeben durch

$$X^2 = \nu(\mathcal{Z}(k_2)) = \{A, B\}$$

Es ist $X = X^1 \times X^2 = \nu(\mathcal{Z}(k_1)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_4)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_5)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_2))$. Mit $X^1 = \{x_j^1 \,|\, j = 1, \ldots, 8\}$ und $X^2 = \{x_1^2, x_2^2\}$ erhält man folgende Auszahlungsmatrizen für die beiden Spieler (beachte, dass sich diese auf die verkürzte Darstellung beziehen):

	x_1^2	x_2^2
x_j^1	A	B
(L,l,l)	(0,0)	(1,2)
(L,l,r)	(0,0)	(0,0)
(L,r,l)	(1,2)	(1,2)
(L,r,r)	(1,2)	(0,0)
(R,l,l)	(2,1)	(2,1)
(R,l,r)	(2,1)	(2,1)
(R,r,l)	(2,1)	(2,1)
(R,r,r)	(2,1)	(2,1)

Nash-Gleichgewichte sind die Strategiekombinationen (x_j^1, x_1^2) *und* (x_j^1, x_2^2) *für* $j = 5, \ldots, 8$ □

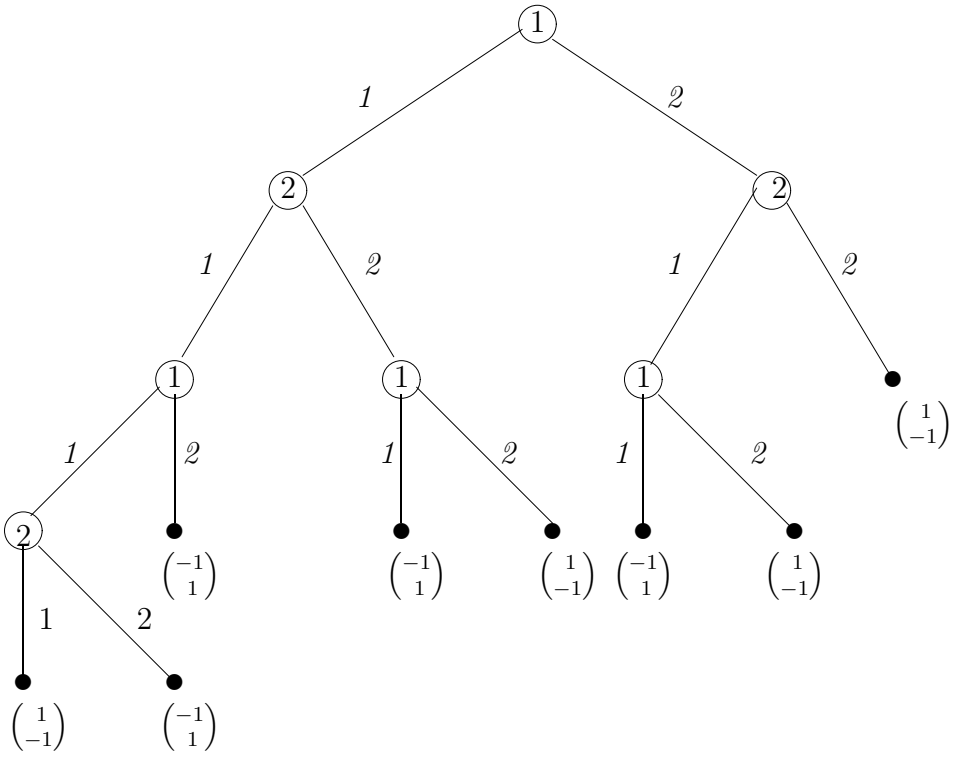
Typisch für die Umformulierung eines Spiels in Extensivform in ein solches in Normalform ist, dass eine relativ große Zahl von Strategiekombinationen auftritt, die bei einer direkten Formulierung des Spiels in Normalform vermieden worden wäre. In obigem Beispiel können von den letzten vier Kombinationen offensichtlich drei gestrichen werden. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 5.6 *Zwei Strategien* x^i *und* $\widetilde{x}^i$ *des Spielers* i *heißen äquivalent, wenn für alle Strategien der Mitspieler alle Auszahlungen identisch sind, d.h. wenn gilt:*

$$u_l(x^i, x^{-i}) = u_l(\widetilde{x}^i, x^{-i}) \quad \forall\, x^{-i} \in X^{-i}\,,\ \forall\, l = 1, \ldots, m$$

Beachte: Bei äquivalenten Strategien muss nur ein Vertreter in die Strategiemenge aufgenommen werden.

Beispiel 5.4 *Im Spiel „NIM“ können 2 Spieler nacheinander von einem Haufen mit fünf Steinchen jeweils ein oder zwei Steinchen wegnehmen. Wer den letzten Stein wegnimmt, ist Sieger. Er erhält vom Verlierer 1 GE ausgezahlt.*



Das Spiel ist in einem „verkürzten“ Spielbaum dargestellt, verkürzt in folgendem Sinn: Hat ein Spieler auf einer Stufe keine Alternative mehr, d.h. bleibt auf einer Stufe nur noch ein Stein übrig, so lassen wir diesen Zweig im Spielbaum weg und integrieren das Ergebnis dieser Aktion bereits in die Auszahlung der vorherigen Stufe.
Die Strategiemengen des Spielers 1 in Normalform sind gegeben durch

$$\begin{aligned} X^1 &= \nu(\mathcal{Z}(k_1)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_4)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_5)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_6)) \\ &= \{(1,2)\}^4 \\ X^2 &= \nu(\mathcal{Z}(k_2)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_3)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_8)) \\ &= \{(1,2)\}^3 \end{aligned}$$

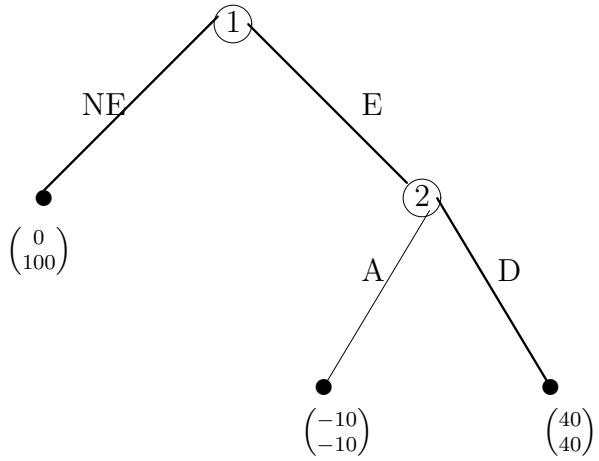
$X := X^1 \times X^2$ besteht also aus 16×8 Elementen (Strategiekombinationen). Wir geben die Auszahlungen der Spieler in Normalform an. Man beachte, dass es sich um ein Nullsummenspiel handelt, so dass es genügt, die Auszahlungsmatrix A für den Spieler 1 anzugeben (die für Spieler 2 ist dann $-A$):

	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(2,1,1)	(1,2,2)	(2,1,2)	(2,2,1)	(2,2,2)
(1,1,1,1)	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1
(1,1,1,2)	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1
(1,1,2,1)	1	-1	1	1	-1	1	1	1
(1,2,1,1)	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
(2,1,1,1)	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1
(1,1,2,2)	1	-1	1	1	-1	1	1	1
(1,2,1,2)	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
(1,2,2,1)	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1
(2,1,2,1)	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1
(2,2,1,1)	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1
(2,1,1,2)·	1	1	1	1	1	1	1	1
(1,2,2,2)	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1
(2,1,2,2)·	1	1	1	1	1	1	1	1
(2,2,1,2)·	1	1	1	1	1	1	1	1
(2,2,2,1)	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1
(2,2,2,2)·	1	1	1	1	1	1	1	1

Das Spiel hat 32 Nash-Gleichgewichte, die dadurch charakterisiert sind, dass Spieler 1 eine der Strategien $(2,1,1,2), (2,1,2,2), (2,2,1,2)$ oder $(2,2,2,2)$ und Spieler 2 irgendeine seiner 8 Strategien wählt. Wählt Spieler 1 eine Nash-Strategie, dann kann Spieler 2 das Ergebnis nicht mehr beeinflussen, egal welche seiner Strategien er wählt. □

5.3 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Zur Einführung greifen wir Beispiel 3.11 (Markteintrittsspielt) nochmals auf. Dabei handelt es sich um ein Spiel zwischen einem Monopolisten (Spieler 2) und einem potentiellen Konkurrenten (Spieler 1), der die Absicht hat, in den Markt einzutreten. Bei einem Markeintritt hat der Monopolist die Wahl, agressiv zu reagieren und einen Vernichtungskampf zu führen („A“) oder eine Marktteilung zu dulden (”D“). Auf Grund der Option A des Spielers 2 kann Spieler 1 die Entscheidung treffen, nicht einzutreten („NE“) oder trotz Androhung des Vernichtungskampfes einzutreten („E“). Die Situation ist in folgendem Spielbaum dargestellt:



Das Spiel in Normalform ist in folgendem Schema wiedergegeben:

		Spieler 2	
		A	D
Spieler 1	NE	0 , 100	0 , 100
	E	-10 , -10	40 , 40

Das Spiel hat zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (NE, A) und (E, D). Das zuerst genannte ist dabei wenig plausibel: Auf Grund der Androhung eines agressiv geführten Wettbewerbs verzichtet Spieler 1 auf einen Markteintritt. Nur ist diese Androhung wirklich glaubhaft? Wenn Spieler 1 tatsächlich eintritt, wird Spieler 2 bei rationalem Verhalten seine Drohung überdenken, und von einem ruinösen Wettbewerb absehen.

Eine Verfeinerung der Nash-Gleichgewichtslösung für dynamische Spiele scheint daher angebracht. Eine Strategiekombination x^* soll nur dann eine Gleichge-

wichtslösung sein, wenn es für keinen Spieler optimal ist, bei irgendeinem Teilspiel, das an einem beliebigen Entscheidungsknoten k beginnt, von seiner Strategie abzuweichen. Gleichgewichte, die diese Forderung erfüllen, bezeichnet man als teilspielperfekte Gleichgewichte. Zur exakten Definition dieses Begriffes sind einige Bezeichnungen erforderlich.

Sei $(\vec{T}(\mathcal{K},\mathcal{P}),\mathcal{A},\mathcal{S})$ ein Spielbaum und sei $k \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{F}$ beliebig. $k' \in \mathcal{K}$ nennen wir einen Nachfahren von k in $(\vec{T}(\mathcal{K},\mathcal{P}) := \vec{T}$, wenn es einen Weg von k nach k' gibt. Die Menge der Nachfahren von k in $\vec{T}$ wird mit $\mathcal{K}_k$ bezeichnet. $\mathcal{P}_k$ sei die Menge aller Pfeile, die k oder einen Nachfahren k' als Anfangsknoten besitzen. Dann ist offenbar $\vec{T}(\mathcal{K}_k,\mathcal{P}_k)$ ein Wurzelbaum mit Wurzel k (Teilbaum in $\vec{T}$ mit Wurzel k). Dieser wird zu einem Teilspielbaum von $\vec{T}$, wenn man die Zuordnungen von Knoten zu Spielern und von Pfeilen zu Aktionen durch die Einschränkungsabbildung $\varphi|_{\mathcal{K}_k\backslash\mathcal{F}_k}$ bzw. $\nu|_{\mathcal{P}_k}$ vornimmt. Die der Knotenmenge $\mathcal{K}_k\backslash\mathcal{F}_k$ entsprechende Menge von eigentlichen Spielern bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_k$.
$(\vec{T}(\mathcal{K}_k,\mathcal{P})_k,\mathcal{A}_k,\mathcal{S})$ wird nun Teilspielbaum (zum Wurzelknoten k) des gegebenen Spielbaums genannt.

Definition 5.7 *Sei G ein Spiel in extensiver Form mit perfekter Information und sei k ein Knoten in G, der nicht final ist. Man erhält dann auf dem Teilspielbaum $(\vec{T}(\mathcal{K}_k,\mathcal{P})_k,\mathcal{A}_k,\mathcal{S})$ ein Spiel in extensiver Form, wenn man jedem Knoten $k' \in \mathcal{K}_k$ mit $\varphi(k') = 0$ die (ursrüngliche) Wahrscheinlichkeitsverteilung $(\omega)_{k'}$ aus G und jedem eigentlichen Spieler $i \in \mathcal{A}_k$ an jedem Endknoten $k_f \in \mathcal{F}_k$ die Auszahlung $u_i^e(k_f)$ zuordnet. Ein solches Spiel nennt man (ein vom Knoten k) ausgehendes Teilspiel und bezeichnet es mit G_k.*

Definition 5.8 *Sei G ein Spiel in extensiver Form mit perfekter Information und x^* ein Nash-Gleichgewicht. Dann wird x^* ein teilspielperfektes Gleichgewicht genannt, wenn x^* auf jedem Teilspiel G_k von G ein Nash-Gleichgewicht induziert, was heißt, dass die Komponenten von x^*, die zu Pfeilen von G_k gehören, ein Nash-Gleichgewicht in G_k bilden.*

Das vorangehende Markteintrittsspiel G besitzt die beiden Nash-Gleichgewichte $x^* = (NE, A)$ und $\bar{x}^* = (E, D)$. Es gibt nur ein (echtes) Teilspiel, nämlich G_{k_3} (Teilspiel mit Wurzelknoten k_3). x^* besitzt in G_{k_3} die Komponente A, offensichtlich stellt sie kein Nash-Gleichgewicht in G_{k_3} dar. Dagegen ist die Komponente D von $\bar{x}^*$ ein Nash-Gleichgewicht in G_{k_3}. Somit ist $\bar{x}^* = (E, D)$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht in G.

Satz 5.1 *Jedes extensive Spiel G mit perfekter Information hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht in reinen Strategien.*

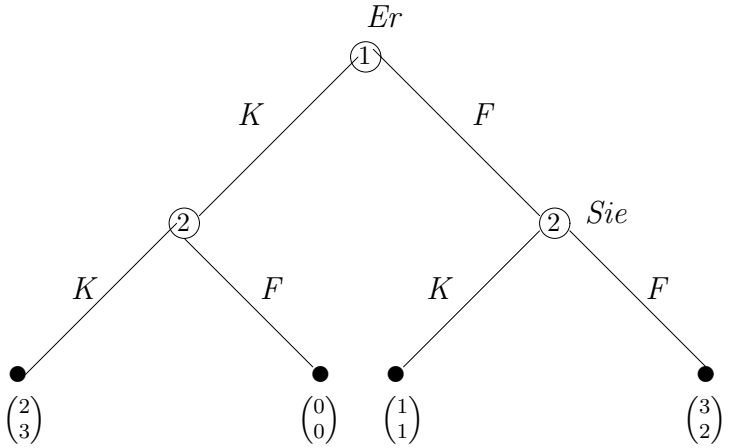
BEWEIS: Die Anzahl der Pfeile eines Weges $\mathcal{W}(k_1, k)$ wird Länge des Weges genannt und mit $L(\mathcal{W}(k_1, k))$ bezeichnet. Ist G_k ein Teilspiel von G, so wird die Länge eines Weges maximaler Länge in G_k Länge von G_k genannt und mit $L(G_k)$ bezeichnet. Das Satz wird durch Induktion über über die Länge $L(G_k)$ des Teilspiels geführt:
Ist $L(G_k) = 1$, so sind Knoten $k' \in \mathcal{N}(k)$ finale Knoten. Für den Spieler $i = \varphi(k)$ führt die Entscheidung $\nu(p)$ mit $p \in \mathcal{Z}(k)$ dann zu einem Nash-Gleichgewicht in G_k, wenn $\nu(p)$ eine maximale Auszahlung für Spieler i im Endknoten k' herbeiführt.
Sei nun $s \in \mathbb{N}$ mit $s < L(G)$ gewählt, und sei die Behauptung für jedes Teilspiel mit $L(G_k) \leq s$ richtig. Wähle nun ein Teilspiel $G_{\bar{k}}$ der Länge $s+1$. Alle Teilspiele $G(k)$ mit $k \in \mathcal{N}(\bar{k})$ besitzen nach Induktionsvoraussetzung ein teilspielperfektes Gleichgewicht.
Ist $i = \varphi(\bar{k})$ ein eigentlicher Spieler, so erhält man ein teilspielperfektes Gleichgewicht in $G_{\bar{k}}$, wenn eine Entscheidung $\nu(p)$ mit $p \in \mathcal{Z}(\bar{k})$ gefällt wird, die zu einem Teilspiel mit maximaler Auszahlung für den Spieler i führt. Ist $\varphi(\bar{k}) = 0$, so ist die Vorgehensweise leicht zu modifizieren. Die Auszahlungen für die Teilspiele G_k $(k \in \mathcal{N}(\bar{k}))$ sind zuerst mit den Wahrscheinlichkeiten der Vorgängerpfeile zu multiplizieren und dann ist die „Entscheidung“ zu wählen, die zu einem maximalen Wert führt.
Auf diese Weise verfährt man mit allen Teilspielen der Länge $s+1$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung:

- Ein extensives Spiel G mit perfekter Information besitzt also stets ein (teilspielperfektes) Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Dagegen braucht ein Spiel in Normalform kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien zu besitzten. Zur Sicherstellung der Existenz muss dann schon zu Spielen in gemischten Strategien übergegangen werden.

- Der Beweis von Satz 5.1 beinhaltet eine konstruktive Methode, ein teilspielperfektes Gleichgewicht zu berechnen. Die Methode besteht in einer „Rückwärtsinduktion“, wie sie in der dynamischen Optimierung angewendet wird.

Beispiel 5.5 *Im Beispiel 1.1 haben wir zwei Personen („er“, „sie“) betrachtet, die beide die Strategiemengen $\{K, F\}$ besitzen. Das Beispiel wird nun so modifiziert, dass Spieler 1 („er“) eine Vorgabe macht, auf deren Grundlage dann Spieler 2 („sie“) eine Entscheidung trifft. Das Spiel wird in folgendem Spielbaum dargestellt.*



Das Spiel wird wieder in Normalform dargestellt. Es gilt:

$$\begin{aligned} X^1 &= \nu(\mathcal{Z}(k_1)) = \{K, F\} \\ X^2 &= \nu(\mathcal{Z}(k_2)) \times \nu(\mathcal{Z}(k_2)) = \{(K,K), (K,F), (F,K), (F,F)\} \end{aligned}$$

Die Auszahlungsmatrizen beider Spieler sind in folgender Tabelle wiedergegeben:

		Spieler 2			
		(K,K)	*(K,F)*	*(F,K)*	*(F,F)*
Spieler 1	*K*	**(2,3)**	*(2,3)*	*(0,0)*	*(0,0)*
	F	*(1,1)*	**(3,2)**	*(1,1)*	**(3,2)**

Nash-Gleichgewichte sind durch Fettdruck gekennzeichnet. Es gibt zwei (eigentliche) Teilspielbäume, nämlich G_{k_2} und G_{k_3}. Man prüft nach:

- *die Einschränkung von $x^* := (K, (KK))$ ergibt in G_{k_3} kein Nash-Gleichgewicht;*
- *die Einschränkung von $\bar{x}^* := (F, (FF))$ ergibt in G_{k_2} kein Nash-Gleichgewicht;*
- *die Einschränkung von $\tilde{x}^* := (F, (KF))$ liefert in G_{k_2} und G_{k_3} ein Nash-Gleichgewicht.*

5.4 Spiele ohne perfekte Information

Wir haben bisher die von G induzierte Normalform $\Gamma|_G$ nur für extensive Spiele mit perfekter Information definiert. Die Definition soll nun verallgemeinert werden auf extensive Spiele ohne perfekte Information. Die Informationspartitionen

für Spieler i seien gegegen durch $\mathcal{I}^i := \{I_1^i, \ldots, I_{t_i}^i\}$. Voraussetzungsgemäß gilt für festes i und j:

$$k, k' \in I_j^i \implies \nu\mathcal{Z}(k) = \nu\mathcal{Z}(k')$$

Für ein $k \in I_j^i$ setzen wir: $\mathcal{Z}(I_j^i) := \mathcal{Z}(k)$.

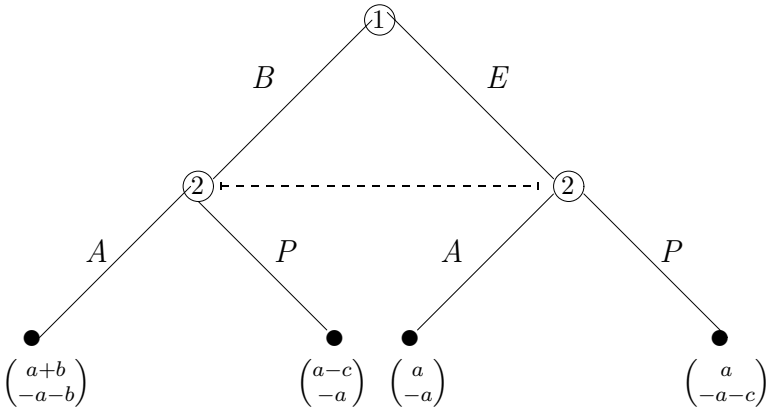
Definition 5.9 *Sei* $G := \left(\vec{T}(\mathcal{K}, \mathcal{P}), \mathcal{A}, \mathcal{S}, (\omega)_{k\,:\,\varphi(k)=0}, (\mathcal{I}^i), u^e\right)$ *ein extensives Spiel (ohne perfekte Information). Als (reine) Strategie des Spielers* i *mit* $i \in \mathcal{A} \cup \{0\}$ *versteht man jedes Element* x^i *aus der Menge*

$$X^i := \prod_{j=1}^{t_i} \nu(\mathcal{Z}(I_j^i)) \in \mathbb{R}^{t_i} \tag{5.3}$$

Dabei ist t_i *die Anzahl der Partitionsmengen, in die* $\varphi^{-1}(i)$ *zerlegt ist.*

Setzt man $x^i := (x_1^i, \ldots, x_{t_i}^i)$, so entspricht jeder Informationsmenge I_j^i genau ein Pfeil $Tr(x_j^i)$, der an die Informationsmenge anschließt. Die Strategiekombination der eigentlichen Spieler in Normalform ist dann wieder durch $X = X^1 \times \ldots \times X^m$ gegeben.

Beispiel 5.6 *Wenn ein Versicherungsnehmer (Spieler 1) seiner Versicherungsgesellschaft (Spieler 2) einen Schaden meldet, weiß die Versicherung nicht, ob überhöhte Forderungen gestellt werden.*
In diesem Sinne betrachten wir folgendes extensive Spiel. Der Versicherungsnehmer hat die Option, überhöhte Kosten $a + b$ *[GE] (Strategie: B (Betrug)) oder echte Kosten* a *[GE] (Strategie: E (Ehrlichkeit)) in Rechnung zu stellen. Die Versicherung kann die geforderten Beträge auszahlen (Strategie A) oder gegen den Versicherungsnehmer prozessieren (Strategie P), immer in der Ungewißheit, wie sich der Versicherungsnehmer tatsächlich verhalten hat. Wir nehmen an, dass vor Gericht die Wahrheit ans Tageslicht kommt. Der vor Gericht Unterlegene muss die Prozeßkosten in Höhe von* c *[GE] zahlen. Es ist* $a, b, c > 0$*. Das Spiel in extensiver Form ist anschaulich durch folgenden Spielbaum wiedergegeben:*



Die Informationsmengen sind gegeben durch $I_1^1 = \{k_1\}$ *und* $I_1^2 = \{k_2, k_3\}$. *Die reinen Strategien sind nun durch* $X = X^1 \times X^2$ *gegeben mit*

$$X^1 = \nu(\mathcal{Z}(I_1^1)) = \{B, E\}\ , X^2 = \nu(\mathcal{Z}(I_1^2)) = \{A, P\}$$

Man gelangt zu einem äquivalenten Spiel, wenn man zu allen Auszahlungen den Vektor $(-a, a)^T$ *hinzuaddiert. Man erhält somit die folgenden Auszahlungsmatrizen für die beiden Spieler:*

. *Spieler 2*

Spieler 1		*A*	*P*
	B	*(b,-b)*	*(-c,0)*
	E	*(0,0)*	*(0,-c)*

Man prüft nach, dass das Spiel kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt. (Man beachte, dass für ein extensives Spiel mit perfekter Information ein solches existieren würde.) Wie uns bekannt ist, gibt es aber ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.
Für $b := 2$ *[GE] und* $c := 1$ *[GE] berechnen wir ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien. Zu jeder Auszahlungsmatrix addieren wir* $(b + c)E$, *damit in den Matrizen nur positive Einträge stehen (vgl. Lemma 3.1) Auf diese Weise bekommt man folgendes Starttableau für das Lemke-Verfahren:*

	z_1	z_2	z_3	z_4	
w_1	0	0	5	2	1
w_2	0	0	3	3	1
w_3	1	3	0	0	1
w_4	3	2	0	0	1

Mit dem Verfahren erhält man folgende Lösung des LCP: $\bar{z_1} = \bar{x_1} = 0.14$, $\bar{z_2} = \bar{x_2} = 0.28$, $\bar{z_3} = \bar{y_1} = 0.11$, $\bar{z_4} = \bar{y_2} = 0.22$. *Damit ist nach Satz 3.9 ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gegeben durch:*

$$x^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T\ , \quad y^* = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$$

Spieler 1 wählt „B“ bzw. „E“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 33 % zu 66 %. Entsprechend verhält sich Spieler 2 mit seinen Strategien „A“ und „P“.
Natürlich hängen diese Wahrscheinlichkeiten von den Zahlenwerten für b *und* c *ab.*
Rechnet man das Problem mit allgemeinen Werten b, c *durch, so erhält man:*

$$x^* = \frac{1}{b+c}\,(c, b)^T \qquad y^* = \frac{1}{b+c}\,(c, b)^T \qquad \square$$

Das Beispiel zeigt, dass ein Spiel in Extensivform ohne perfekte Information kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzen muss. Bekannt ist aber, dass Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien existieren. An den Begriff der gemischten Strategie (vgl. Definition 2.2) sei hier nochmals erinnert. In den folgenden Ausführungen legen wir die *Spielermenge* $\mathcal{A} := \{1, \ldots, m\}$ zugrunde. (Sie lassen sich aber wörtlich auf den Fall $\mathcal{A} \cup \{0\}$ übertragen.)

Ist für jeden Spieler i die reine Strategiemenge durch $X^i := \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n_i}^i\}$ gegeben, so ist die Menge seiner gemischten Strategien durch

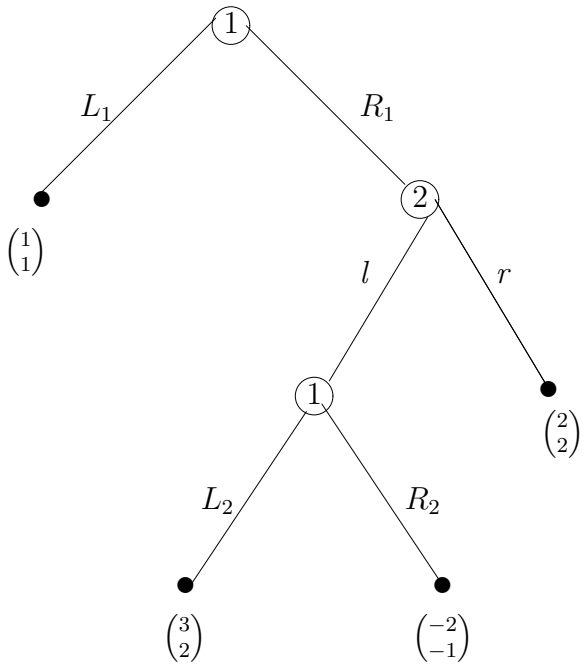
$$\widehat{X^i} := \{(\xi_1^i, \ldots, \xi_{n_i}^i) \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \sum_{j=1}^{n_i} \xi_j^i = 1\,,\ \xi_j^i \geq 0 \ \forall\, j = 1, \ldots, n_i\}$$

definiert. Für $(\xi^1, \ldots, \xi^m) \in \widehat{X} := \widehat{X^1} \times \ldots \times \widehat{X^m}$ lautet die Auszahlung an i:

$$\widehat{u}_i(\xi^1, \ldots, \xi^m) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{j_m=1}^{n_m} (\xi_{j_1}^1 \cdot \ldots \cdot \xi_{j_m}^m)\ u_i(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_m}^m)$$

Eine gemischte Strategie $\xi^i := (\xi_1^i, \ldots, \xi_{n_i}^i)$ des Spielers i stellt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der reinen Strategien dar. Man kann sie als Zufallsmechanismus auffassen, der *globale*, d.h. sich auf den gesamten Spielplan beziehende Aktionspläne umfasst. $\widehat{u}_i(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ ist der Erwartungswert des Spielers i bei einer Kombination gemischter Strategien $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ aller Spieler.

Beispiel 5.7 *Erläuterung der Begriffe an einem 2-Personen 3-Stufen Spiel:*



Die Informationsmengen werden als einelementig vorausgesetzt: $I_1^1 := \{k_1\}$, $I_1^2 := \{k_4\}$, $I_2^1 := \{k_2\}$, $I_2^2 := \{k_3\}$. *Spieler 1 stehen 4 reine Strategien zur Verfügung:*

$$x_1^1 = (L_1, L_2)\ , \quad x_2^1 = (L_1, R_2)\ , \quad x_3^1 = (R_1, L_2)\ , \quad x_4^1 = (R_1, R_2)$$

Spieler 2 besitzt zwei reine Strategien: $x_1^2 = l$, $x_1^2 = r$. *Die Auszahlungsmatrizen in reinen Strategien lauten für beide Spieler:*

. *Spieler 2*

		l	r
Spieler 1	(L_1, L_2)	*(1,1)*	*(1,1)*
	(L_1, R_2)	*(1,1)*	*(1,1)*
	(R_1, L_2)	*(3,2)*	*(2,2)*
	(R_1, R_2)	*(-2,-1)*	*(2,2)*

Wir nehmen nun, dass Spieler 1 seine 4 Strategien mit den W-Verteilung $\xi^1 := (\frac{1}{4}, 0, 0, \frac{3}{4})$ *und Spieler 2 seine beiden Strategien mit der W-Verteilung* $\xi^2 := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *spielt. Dann berechnen sich die Erwartungswerte der Auszahlungen für beide Spieler wie folgt:*

$$\begin{aligned} \widehat{u_1}(\xi^1, \xi^2) &= \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}\,1 + \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}\,1 + \tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}\,(-2) + \tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}\,2 = 0.25 \\ \widehat{u_2}(\xi^1, \xi^2) &= \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}\,1 + \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{2}\,1 + \tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}\,(-1) + \tfrac{3}{4}\,\tfrac{1}{2}\,2 = 0.625 \end{aligned}$$

Neben gemischten Strategien gibt es bei Spielen in Extensivform eine weiteres Strategiekonzept, das jedem Spieler i lokal an jeder seiner Informationsmengen I_j^i eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die ihm zur Verfügung stehenden Aktionen $\nu(\mathcal{Z}(I_j^i))$ zuordnet. Ein solcher Plan wird Verhaltensstrategie genannt.

Definition 5.10 *G sei ein Spiel in Extensivform. Die Informationspartitionen für Spieler i seien gegegen durch $\mathcal{I}^i := \{I_1^i, \ldots, I_{t_i}^i\}$. Eine Verhaltensstrategie von i ist ein Tupel $b^i := (b_j^i)_{j=1,\ldots,t_i}$, wobei b_j^i eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der Aktionen $\nu(\mathcal{Z}(I_j^i))$ darstellt.*

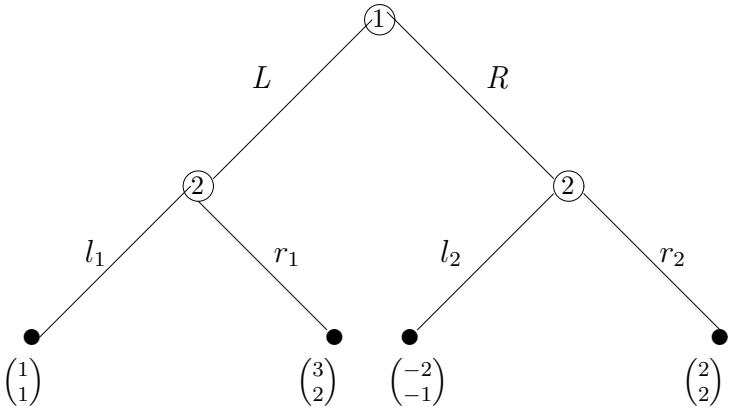
Liegt jeweils eine Verhaltensstrategie b^i für einen Spieler i vor $(i = 1, \ldots, m)$, so stellt $b := (b^1, \ldots, b^m)$ eine Kombination von Verhaltensstrategien aller Spieler dar. Auf jedem Vorwärtsstern eines Knotens $k \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{F}$ ist damit eine W-Verteilung definiert, die für zwei Knoten k, k' aus derselben Informationsmenge I_j^i identisch ist. Ist nun $\mathcal{W}(k_1, k_f) = [p_{l_1}, \ldots, p_{l_s}]$ ein Weg von der Wurzel k_1 zu einem finalen Knoten k_f, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Weg durchlaufen wird, das Produkt der Wahrscheinlichkeiten an den Pfeilen $p_{l_1}, \ldots, p_{l_s}$ dieses Weges. Da ein Weg von k_1 nach k_f eindeutig bestimmt ist, hängt dieses Produkt nur von b und k_f ab; es wird mit $P^b(k_f)$ bezeichnet.

Definition 5.11 *Gegeben seien eine Kombination $b = (b^1, \ldots, b^m)$ von Verhaltensstrategien aller Spieler sowie die Auszahlungsvektoren $u^e(k)$ eines extensiven Spiels für alle finalen Knoten $k \in \mathcal{F}$. Die Auszahlung von Spieler i ist der Erwartungswert über alle möglichen Spielausgänge $k \in \mathcal{F}$, d.h.*

$$\widetilde{u}_i(b^1, \ldots, b^m) = \sum_{k \in \mathcal{F}} P^b(k)\, u^e(k)_i$$

Bevor wir der Frage nachgehen, welche Beziehung zwischen gemischten Strategien und Verhaltensstrategien besteht, wollen wir den Begriff der Verhaltensstrategie und der zugehörigen Auszahlungsfunktion für die Spieler an einem Beispiel erläutern.

Beispiel 5.8 *Wir betrachten das folgende extensive Spiel:*



Es liegt wieder ein Spiel mit perfekter Information vor: $I_1^1 = \{k_1\}$, $I_1^2 = \{k_2\}$, $I_2^2 = \{k_3\}$. Wir betrachten nun die folgende Kombination $b = (b^1, b^2)$ von Verhaltensstrategien:

$$b^1 := (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\,, \quad b^2 := ((1,0), (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}))$$

Spieler 1 spielt seine Strategien L bzw. R mit gleicher Wahrscheinlichkeit, während Spieler 2 seine Strategien l_1 mit Wahrscheinlichkeit 1 und l_2 zu r_2 mit $\frac{1}{3}$ zu $\frac{2}{3}$ spielt. Die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen eines finalen Knoten lautet:

$$P^b(k_4) = 1/2\,, \quad P^b(k_5) = 0\,, \quad P^b(k_6) = 1/6\,, \quad P^b(k_7) = 1/3$$

Die Auszahlung für die beiden Spieler lautet somit:

$$\widetilde{u}_1(b) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\,(-2) + \tfrac{1}{3}\,2 = \tfrac{5}{6}\,, \quad \widetilde{u}_2(b) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\,(-1) + \tfrac{1}{3}\,2 = 1 \qquad \square$$

Die beiden Konzepte - Verwendung von gemischten Strategien bzw. von Verhaltensstrategien - induzieren für jeden Spieler auf jeder Stufe des Spiels Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Menge der möglichen Aktionen. Bei der Konstruktion von gemischten Strategien wählt der Spieler einen vollständigen Verhaltensplan im Sinne einer Strategie, während die Konstruktion einer Verhaltensstrategie die separate Zufallswahl einer Aktion an jeder Informationsmenge erfordert. Die Gleichwertigkeit beider Strategieformen wurde von Kuhn 1982 in einer grundlegenden Arbeit festgestellt, wobei aber die Voraussetzung des „perfect recall“ erfüllt sein muss. Was darunter zu verstehen ist, wird im Folgenden erläutert.

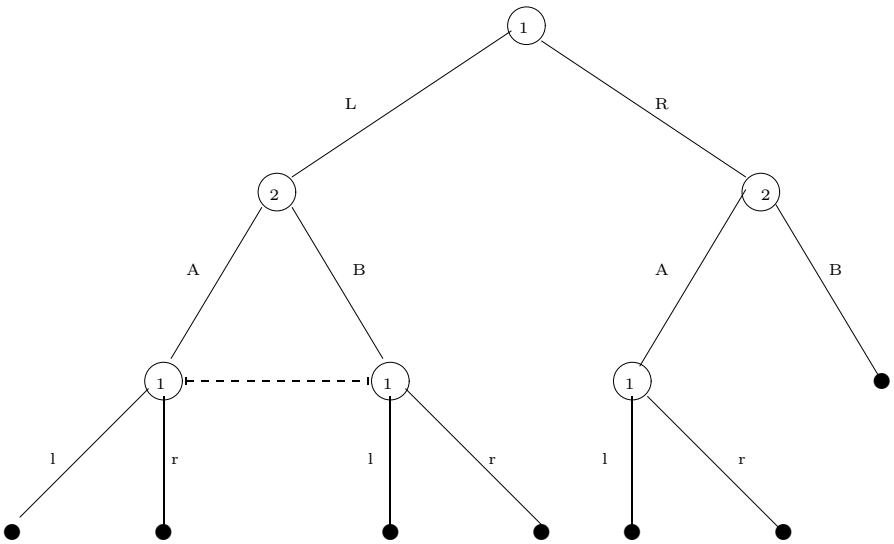
Gegeben sei ein Wurzelbaum $\vec{T}(\mathcal{K})$. Wir sagen, ein Pfeil p liegt vor einem Knoten k, wenn es einen Weg $\mathcal{W}(k_1, k)$ gibt, der den Pfeil p enthält. Wir benutzen dafür das Symbol: $p \triangleleft k$.

Definition 5.12 *G sei ein extensives Spiel (ohne perfekte Information). $\mathcal{I}^i$ sei die Informationspartition für einen beliebigen Spieler i und I_1^i, I_2^i seien beliebige Elemente aus $\mathcal{I}^i$. Wenn dann aus*

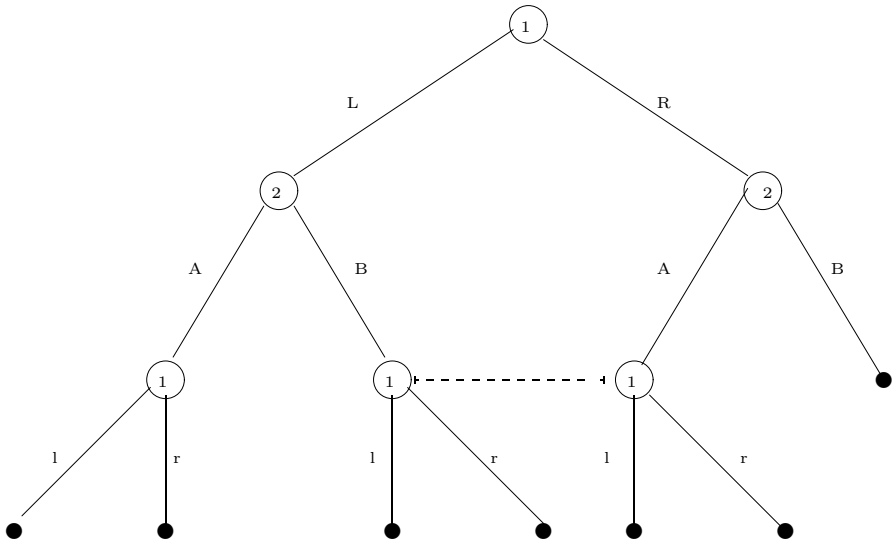
$$p \in \mathcal{Z}(I_1^i)\,,\ k, k' \in I_2^i\,,\ p \triangleleft k \ \textit{stets folgt:}\ p \triangleleft k'$$

so wird G ein Spiel mit perfect recall genannt.

Die Forderung besagt: Liegt $p \in \mathcal{Z}(I_1^i)$ vor einem Knoten $k \in I_2^i$, so soll p auch vor jedem anderen Knoten aus I_2^i liegen. Da Spieler i nicht weiß, an welchem Entscheidungsknoten $k, k' \in I_2^i$ er sich befindet, weiß er dann aber zumindest, welche Aktion $\nu(p)$ er im Anschluß an I_2^i getätigt hat. Erläuterung an zwei **Beispielen**:



Beispiel a) mit perfect recall: $\mathcal{I}^1 := \{I_1^1, I_2^1, I_3^1\} = \{\{k_1\}, \{k_4, k_5\}, \{k_6\}\}$, $\mathcal{I}^2 := \{I_1^2, I_2^2\} = \{\{k_2\}, \{k_3\}\}$



Beispiel b) ohne perfect recall: $\mathcal{I}^1 := \{I_1^1, I_2^1, I_3^1\} = \{\{k_1\}, \{k_4\}, \{k_5, k_6\}\}$, $\mathcal{I}^2$ wie oben.

Kuhn hat 1982 die folgende Aussage formuliert, in der er die Äquivalenz von gemischten Strategien und Verhaltensstrategien feststellt:

> *Angenommen, alle Spieler können sich auf jeder Stufe des Spiels an alle ihre vergangenen Spielzüge erinnern, dann kann man zeigen, dass gemischte Strategien und Verhaltensstrategien äquivalent sind in folgendem Sinne, dass sie die gleichen (erwarteten) Auszahlungen generieren.*

Wir wollen diese Aussage präzise formulieren. Bevor dies geschieht, wollen wir festhalten, dass jede Kombination $\xi := (\xi^1, \ldots, \xi^m)$ gemischter Strategien (ebenso wie jede Verhaltensstrategie $b := (b^1, \ldots, b^m)$) auf jedem Knoten $k \in \mathcal{F}$ eine Wahrscheinlichkeit $\widetilde{P}^{\xi}(k)$ (bzw. $P^b(k)$) induziert. Diese besagt, dass bei Anwendung von ξ (bzw. b) der finale Knoten k mit eben dieser Wahrscheinlichkeit durch einen Spielablauf erreicht wird für jedes $k \in \mathcal{F}$.

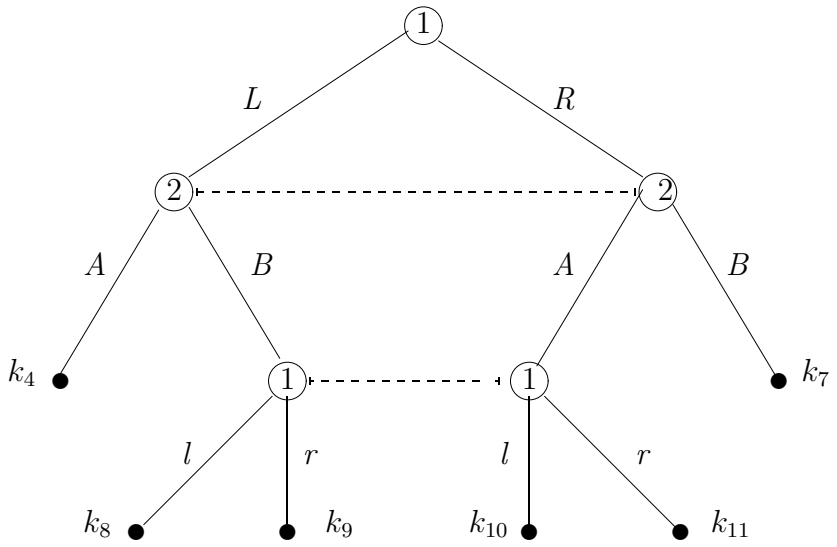
Satz 5.2 *Gegeben sei ein Spiel G in extensiver Form mit perfect recall. Zu jeder gemischten Strategie ξ gibt es dann eine Verhaltensstrategie b, so dass*

$$P^b(k) = \widetilde{P}^{\xi}(k) \ \forall \ k \in \mathcal{F}$$

und für die erwarteten Auszahlungen $\widehat{u}_i(\xi) = \widetilde{u}_i(b)$ für $i \in \mathcal{A}$ gilt.

Wir verzichten auf einen Beweis des Satzes von Kuhn und zeigen durch ein Beispiel, dass die Aussage falsch ist, wenn die Eigenschaft des „perfect recall“ nicht voraussgesetzt wird.

Beispiel 5.9 *Ein Spiel in extensiver Form sei durch folgenden Spielbaum charakterisiert:*



Informationspartionen: $\mathcal{I}^1 := \{I_1^1, I_2^1\} = \{\{k_1\}, \{k_5, k_6\}\}$, $\mathcal{I}^2 = \{I_1^2\} = \{\{k_2, k_3\}\}$. *Das Spiel weist keinen perfekt recall auf. Die reinen Strategien berechnen sich zu*

$$X^1 := \nu(\mathcal{Z}(k_1)) \times \nu(\mathcal{Z}(I_2^1)) = \{L, R\} \times \{l, r\}\ , \quad X^2 := \nu(\mathcal{Z}(I_1^2)) = \{A, B\}$$

Die reinen Strategien sind somit gegeben durch

$$x_1^1 = (L, l)\,,\ x_2^1 = (L, r)\,,\ x_3^1 = (R, l)\,,\ x_4^1 = (R, r)\ , \quad x_1^2 = A\,,\ x_2^2 = B$$

Für die Spieler 1 und 2 wählen wir jeweils folgende gemischte Strategie (zu interpretieren als Wahrscheinlichkeiten, mit der die reinen Strategien eingesetzt werden):

$$\xi^1 := \left(\tfrac{1}{2}, 0, 0, \tfrac{1}{2}\right) \quad \textit{und} \quad \xi^2 := ((1-p), p)$$

mit $p \in (0, 1)$.
Wir bestimmen für die Kombination $\xi := (\xi^1, \xi^2)$ *die Wahrscheinlichkeit, die sie an jedem finalen Knoten induziert. Wir erhalten:*

$k \in \mathcal{F}$	k_4	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}
$\widetilde{P}^{\xi}(k)$	$\frac{1}{2}(1-p)$	$\frac{1}{2}p$	$\frac{1}{2}p$	0	*0*	$\frac{1}{2}(1-p)$

Für eine Verhaltensstrategie $b := (b^1, b^2)$ *machen wir den allgemeinen Ansatz* $b^1 := ((b_L, b_R), (b_l, b_r))$ *und* $b^2 = ((1-q), q)$ *mit* $q \in [0,1]$ *(zu interpretieren als W-Verteilungen an den Informationsmengen* $\{k_1\}, \{k_5, k_6\}$ *bzw.* $\{k_2, k_3\}$*, die angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich eine Aktion anschließt) und ermitteln die Wahrscheinlichkeiten, die dadurch an den finalen Knoten induziert werden:*

$k \in \mathcal{F}$	k_4	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}
$P^b(k)$	$b_L(1-q)$	$b_R q$	$b_L q b_l$	$b_L q b_r$	$b_R(1-q)b_l$	$b_R(1-q)b_r$

Angenommen, es würde $\widetilde{P}^{\xi}(k) = P^b(k)$ *für alle* $k \in \mathcal{F}$ *gelten.*
Dann folgt wegen $p \in (0,1)$ *direkt* $q \in (0,1)$ *und* $b_L \neq 0 \neq b_R$ *(s. Knoten* k_4, k_7*). Damit erhält man weiter:*

$$b_r = 0 \quad \wedge \quad b_l = 0$$

Dies ist aber ein Widerspruch, weil $b_l + b_r = 1$ *gelten muss.*
Damit ist gezeigt, dass es im vorliegenden Fall zu dem gegebenen ξ *keine Verhaltensstrategie* b *gibt mit* $\widetilde{P}^{\xi}(k) = P^b(k)$ *für alle* $k \in \mathcal{F}$*. Damit ist klar, dass auch die erwarteten Auszahlungen nicht übereinstimmen, denn sie berechnen sich für Spieler* i *nach*

$$\widehat{u}_i(\xi) = \sum_{k \in \mathcal{F}} \widetilde{P}^{\xi}(k)\, u_i^e(k) \quad \textit{bzw.} \quad \widetilde{u}_i(b) = \sum_{k \in \mathcal{F}} P^b(k)\, u_i^e(k)$$

wobei $(u_i^e(k))_{i \in \mathcal{A}}$ *der Auszahlungsvektor für reine Strategien am finalen Knoten* k *ist.* □

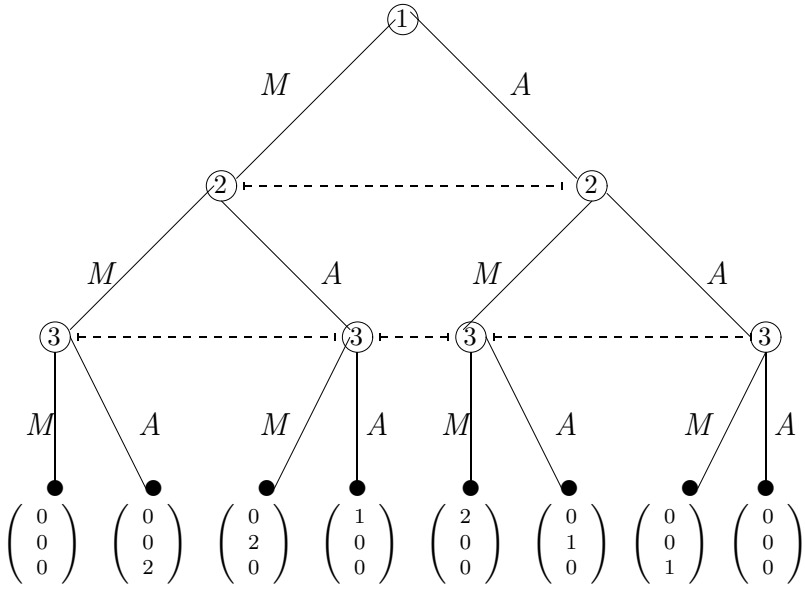
Nachzutragen ist, dass bei der Definition eines Teilspiels in einem Spiel ohne perfekte Information eine zusätzliche Forderung auftritt:

Definition 5.13 *G sei ein Spiel ohne perfekte Information. Dann ist G_k ($k \in \mathcal{K}$) in G ein Teilspiel, wenn G_k die in Definition 5.7 genannten Eigenschaften besitzt und darüber hinaus die folgende Forderung erfüllt: Jede Informationsmenge I_j^i gehört entweder zu G_k oder nicht, d.h. Informationsmengen dürfen nicht „zerschnitten“ werden.*

5.5 Weitere Beispiele

Beispiel 5.10 *Drei Firmen möchten ein ähnliches Produkt, mit dem sie auf dem Markt konkurrieren, als passende Geschenkidee für die nahen Feiertage anpreisen.*

Jede Firma hat die Möglichkeit, ihre Werbung entweder beim Frühstücksfernsehen (Strategie „morgens“: M) oder am Abend vor der Tagesschau (Strategie „abends“: A) zu plazieren. Wenn eine Firma allein am Morgen oder am Abend wirbt, wird die Wirkung des Fernsehspots mit 1 bzw. 2 bewertet. Werben aber zwei Firmen zur gleichen Werbezeit, wird die Effizienz des Spots jeweils mit null eingeschätzt. Jede der Firmen ist also bemüht, morgens oder abends allein zu werben, mit Priorität für abends. Gibt es Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien? Mit welchen Methoden bestimmt man Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien? Welche Bedeutung haben sie?
Wir stellen das Spiel in folgendem Spielbaum dar, wobei die strichlierten Linien wiederum die Infomationsmengen kennzeichnen:



Die Kombinationen reiner Strategien in Normalform ergeben sich aus

$$X^1 \times X^2 \times X^3 = \nu(\mathcal{Z}(I_1^1)) \times \nu(\mathcal{Z}(I_1^2)) \times \nu(\mathcal{Z}(I_1^3)) = \{M, A\} \times \{M, A\} \times \{M, A\}$$

Damit ergeben sich die Auszahlungen für die Kombinationen aus reinen Strategien gemäß folgender Tabelle:

. *Auszahlungen*

X	*Fa.1*	*Fa.2*	*Fa.3*
(M,M,M)	*0*	*0*	*0*
(M,M,A)	*0*	*0*	*2*
(M,A,M)	*0*	*2*	*0*
(M,A,A)	*1*	*0*	*0*
(A,M,M)	*2*	*0*	*0*
(A,M,A)	*0*	*1*	*0*
(A,A,M)	*0*	*0*	*1*
(A,A,A)	*0*	*0*	*0*

Man kann aus der Tabelle ablesen, dass die Strategiekombinationen (M,M,A), (M,A,M), (A,M,M) Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien sind.
Numerisch kann man Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien ermitteln, indem man die Methoden aus Kapitel 4 verwendet (also das Spiel äquivalent als VIP formuliert und einen Algorithmus zur Lösung von VIP anwendet).
Im vorliegenden Fall ist es auf Grund der speziellen Struktur des Problems möglich, ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien durch „einfache Überlegungen" zu bestimmen. Betrachtet wird die erwartete Auszahlung des Spielers 1:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_1(\xi^1,\xi^2,\xi^3) &= \sum_{j_1=1}^{2}\sum_{j_2=1}^{2}\sum_{j_3=1}^{2} \xi^1_{j_1}\xi^2_{j_2}\xi^3_{j_3}\, u_1(x^1_{j_1},x^2_{j_2},x^3_{j_3}) \\ &= \xi^1_1\,(1-\xi^2_1)\,(1-\xi^3_1) + 2\,(1-\xi^1_1)\xi^2_1\xi^3_1\end{aligned}$$

Dabei wurde $\xi^i_2 = 1-\xi^i_1$ verwendet, insbesondere ist $\widehat{u}_1$ eine Funktion von $(\xi^1_1,\xi^2_1,\xi^3_1)$. Angenommen, es gibt ein Nash-Gleichgewicht $(\xi^{*,1},\xi^{*,2},\xi^{*,3})$ in gemischten Strategien mit $\xi^{*,i} > 0$ für $i = 1,2,3$. Dann ist $\xi^{*,1}_1$ Maximierer der Aufgabe

$$\max \widehat{u}_1(\xi^1_1,\xi^{*,2}_1,\xi^{*,3}_1) \;\; s.d. \quad 0 < \xi^{*,1} < 1 \tag{5.4}$$

$\widehat{u}_1(\xi^1_1,\xi^{*,2}_1,\xi^{*,3}_1)$ ist linear in ξ^1_1 mit den Randwerten

$$\widehat{u}_1(1,\ \xi^{*,2}_1,\xi^{*,3}_1) = (1-\xi^{*,2}_1)\,(1-\xi^{*,3}_1) \quad \textit{und} \quad \widehat{u}_1(0,\ \xi^{*,2}_1,\xi^{*,3}_1) = 2\,\xi^{*,2}_1\,\xi^{*,3}_1$$

Genau dann nimmt die lineare Funktion $\widehat{u}_1(\xi^1_1,\xi^{*,2}_1,\xi^{*,3}_1)$ ein Maximum in $(0,1)$ an, wenn diese Randwerte gleich sind, also gilt:

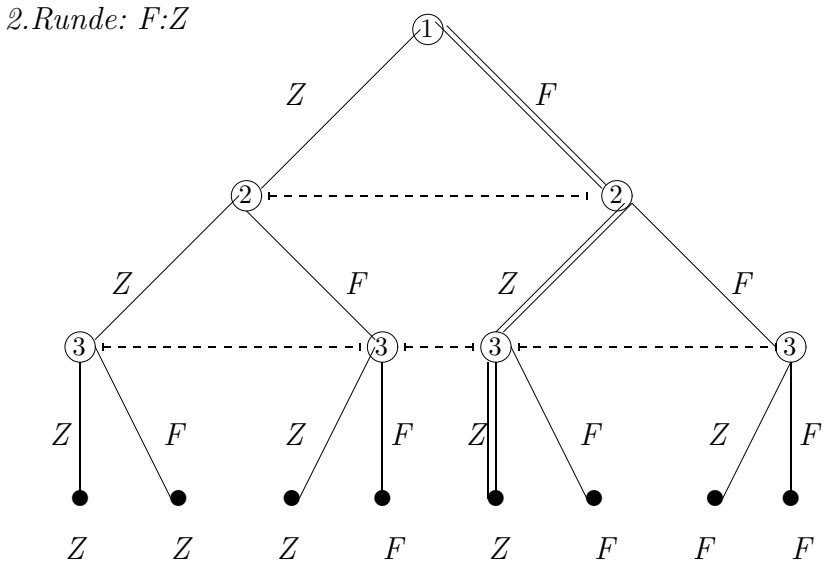
$$(1-\xi^{*,2}_1)\,(1-\xi^{*,3}_1) = 2\,\xi^{*,2}_1\,\xi^{*,3}_1 \tag{5.5}$$

Aus Symmetriegründen gilt: $\xi^{*,1}_1 = \xi^{*,2}_1 = \xi^{*,3}_1 =: s$, somit erhält man aus (5.5): $(1-s)^2 = 2s^2$ mit der Lösung: $s = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 \approx 0.4142$.
Ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien besteht also darin, dass jeder Spieler i seine reinen Strategien M, A mit den Wahrscheinlichkeiten 0.4142 bzw. 0.5858 spielt. □

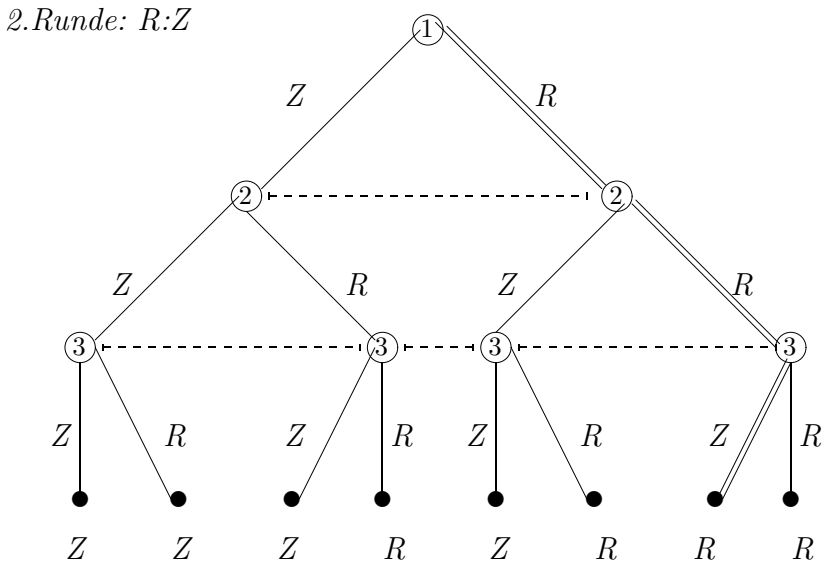
Beispiel 5.11 *Drei Manager in der Marketingabteilung sollen entscheiden, ob die neue Werbekampagne im Rundfunk (R), im Fernsehen (F) oder in Zeitungen (Z) geschaltet wird. In der ersten Runde wird abgestimmt, ob Rundfunk oder Fernsehen sinnvoller ist, in der zweiten Runde wird dann über den Sieger der ersten Runde und über die Kampagne in der Zeitung abgestimmt. Die Meinung über die Erfolgsaussichten der Kampagnen differieren zwischen den Managern; sie haben folgende Präferenzen:*

$$\begin{array}{ll} \textit{Manager 1:} & F \succ R \succ Z \\ \textit{Manager 2:} & R \succ Z \succ F \\ \textit{Manager 3:} & Z \succ F \succ R \end{array}$$

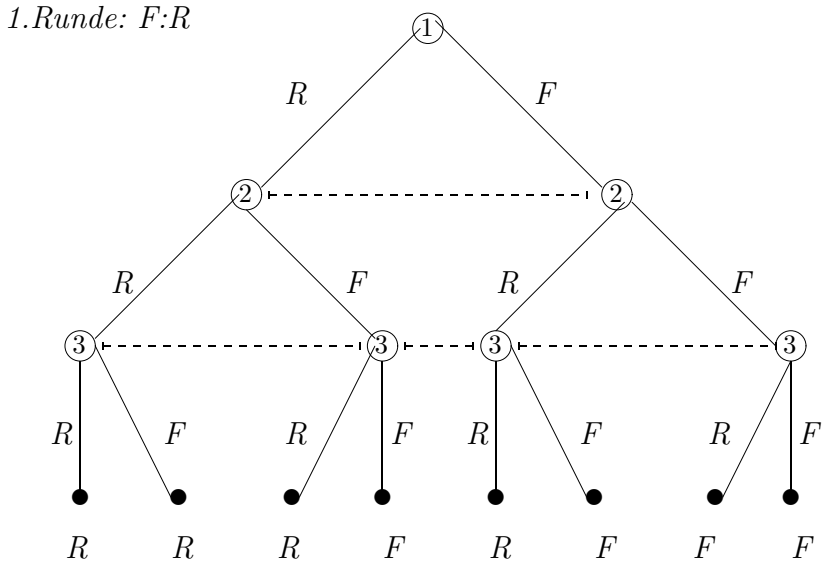
Ziel der Manager ist es, dass am Ende möglichst ihre Präferenzen realisiert werden. Nach der ersten Runde bleibt entweder F oder R übrig, so dass in der zweiten Runde F : Z oder R : Z gespielt werden muss. Dabei ergeben sich die folgenden beiden Teilspiele:



Die stark markierten Pfeile kennzeichnen die Entscheidungen, die jeder Spieler entsprechend seiner Präferenzordnung trifft. Man überzeugt sich davon, dass diese Entscheidungfolge ein Nash-Gleichgewicht in dem Teilspiel darstellt. (Wenn jeweils 2 Spieler bei ihrer Entscheidung bleiben und der verbleibende Spieler ändert seine Entscheidung, so kann er sich gemäß seiner Präferenzordnung nicht verbessern.) Analoge Aussagen gelten, wenn in Runde 2 R : Z gespielt wird:



Der Spielbaum in Runde 1 besitzt folgende Gestalt:



Wenn nun in Runde 1 jeder Spieler seine Entscheidung gemäß seiner Präferenzordnung trifft, entsteht die Entscheidungsfolge $F \to R \to F$ mit dem Ergebnis F in Runde 1, was aber in Runde 2 mit der Folge $F \to Z \to Z$ zum Endergebnis Z führt. Dies kann kein teilspielperfektes Gleichgewicht sein. Denn ändert Spieler 1 seine Entscheidung in der 1.Runde von F zu R, so erzielt er ein besseres Ergebnis:

Runde 1: $R \rightarrow R \rightarrow F$, Runde 2: $R \rightarrow R \rightarrow Z$ mit dem Gesamtergebnis R. Tatsächlich stellt diese Entscheidungsfolge ein teilspielperfektes Gleichgewicht dar.
In Runde 1 muss also Spieler 1 gegen seine Präferenzordnung R wählen, um am Ende für sich das bestmögliche Ergebnis zu erzielen. □

Literaturverzeichnis

[1] Christian Kanzow: Einführung in die Spieltheorie. Vorlesungsskript Universität Würzburg, WS 2006/07.

[2] Christian Kanzow: Optimierungsverfahren zur Lösung linearer Komplementaritätsprobleme. Vorlesungsskript Universität Hamburg. 2004

[3] Walter Schlee: Einführung in die Spieltheorie. Vieweg 2004.

[4] Berninghaus, Ehrhart, Güth: Strategische Spiele. Springer 2006.

[5] C.Geiger, C.Kanzow: Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben. Springer 2001.

[6] Holler, Illing: Einführung in die Spieltheorie. Springer 2008.

[7] B.Penschinski: Theorie und Numerik von Fixpunktverfahren zur Lösung von Variationsungleichungen. Masterthesis 2008, Bergische Universität Wuppertal.

[8] Sieg: Spieltheorie. Oldenbourg.