Übungen zur Elementaren Zahlentheorie
Blatt 4
Abgabe bis 12.05.2010, 18 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Walter Borho
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1. Zwei natürliche Zahlen $A \neq B$ bilden ein *befreundetes Zahlenpaar*, wenn

$$\tau(A) = B \text{ und } \tau(B) = A$$

ist. Beweise den folgenden Satz von Thabit ibn Kurrah (9. Jhd. n. Chr.): Sind für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, die Zahlen

$$p = 3 \cdot 2^n - 1,\ q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \text{ und } r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

drei Primzahlen, so sind

$$A = 2^n pq \text{ und } B = 2^n r$$

befreundet.

Aufgabe 2. Suche mit den Formeln von Thabit ibn Kurrah nach Paaren befreundeter Zahlen.

Aufgabe 3.

(i) Programmiere die Teilersummenfunktion. Berechne $\tau(220)$ und $\tau(284)$ sowie $\tau(1\,210)$ und $\tau^2(1\,210) = \tau(\tau(1\,210))$.

(ii) Ist für ein $n \in \mathrm{N}$ die n-fache wiederholte Anwendung von τ auf ein A wieder A, also

$$\tau^n(A) = A,$$

und ist n minimal mit dieser Eigenschaft, so heißen

$$A, \tau(A), \tau^2(A), \dots, \tau^{n-1}(A)$$

ein *befreundeter n-Zyklus*. Zum Beispiel sind vollkommene Zahlen befreundete 1-Zyklen, befreundete Zahlenpaare sind befreundete 2-Zyklen usw. Folgende Zahlen gehören zu befreundeten n-Zyklen: 2 620, 12 496 und 28 158 165. Für welches n?