Klausur zur Linearen Algebra II
Wintersemester 2011/2012
26.01.2012, 10 - 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Bitte tragen Sie die folgenden Daten leserlich und in Blockschrift ein:

Name	Vorname	Matrikelnummer
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Max. Punktzahl	8	4	4	4	4	4	28	
erreichte Punktzahl								

Aufgabe 1

Kreuzen Sie an (für jede richtige Antwort gibt es 1/2 Punkt, jede falsche Antwort kostet 1/2 Punkt):
Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus, W ein endlich-dimensionaler Euklidischer oder Unitärer Raum und $h \in \mathrm{End}(W)$.

Aussage	wahr	falsch
Ist f surjektiv, so hat f einen Eigenwert. **Falsch**: eine Drehung zu einem Winkel $\neq 0, \pi$ im $\mathbf{R}^2$ is bijektiv, also surjektiv, besitzt aber keinen Eigenwert.	☐	☐
Für einen Eigenwert λ von f ist die Dimension des Hauptraums $H_f(\lambda)$ gleich der algebraischen Vielfachheit von λ. **Wahr** nach Satz aus der Vorlesung.	☐	☐
Sei λ ein Eigenwert von f. Dann ist $f\|_{E_f(\lambda)} \in \mathrm{End}(E_f(\lambda))$ diagonalisierbar. **Wahr**: Eingeschränkt auf den Eigenraum erfüllt f die Bedingung $f(v) = \lambda v$ für alle v, also ist $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$ auf dem Eigenraum, also diagonalisierbar.	☐	☐
Ist f diagonalisierbar, so ist jeder Vektor $v \in V$ in einem Eigenraum zu f enthalten. **Falsch**: Die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen 0 und 1 ist diagonalisierbar, aber der Vektor $(1, 1)$ geht auf $(0, 1)$, ist also kein Eigenvektor.	☐	☐
Ist h eine Spiegelung, so zerfällt das charakteristische Polynom χ_h in Linearfaktoren. **Wahr** nach Satz aus der Vorlesung: h hat einen $(n-1)$-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1 und einen eindimensionalen Eigenraum zum Eigenwert -1.	☐	☐
Es gilt $\ker(f) = E_f(0)$. **Wahr** nach Definition.	☐	☐
Das charakteristische Polynom von f hat die gleichen Nullstellen wie das Minimalpolynom von f. **Wahr** nach Satz aus der Vorlesung.	☐	☐
Orthogonale Endomorphismen sind stets diagonalisierbar. **Falsch**: eine 2×2-Drehmatrix zu einem Winkel $\neq 0, \pi$ ist ein Gegenbeispiel.	☐	☐
Ist h orthogonal, so gilt $\langle v, w\rangle = 0$ genau dann, wenn $\langle h(v), h(w)\rangle = 0$. **Wahr**, da nach Definition $\langle v, w\rangle = \langle h(v), h(w)\rangle$ für alle v, w.	☐	☐
Ist h selbstadjungiert und nilpotent, so ist $h \neq 0$. **Falsch**: die Nullmatrix ist sowohl nilpotent als auch selbstadjungiert nach Definition.	☐	☐
Gilt $\dim H_f(\lambda) = \dim E_f(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ, so ist f diagonalisierbar. **Falsch**: damit dieser Satz gilt, muss erstmal das charakteristische Polynom zerfallen. Das steht hier aber nicht.	☐	☐
Jede komplexe Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert. **Falsch**: die 1×1-Matrix (i) mit $i^2 = -1$ is ein Gegenbeispiel.	☐	☐
V ist stets die direkte Summe der Haupträume von f. **Falsch**: dies gilt nur, wenn das charakteristische Polynom zerfällt.	☐	☐
Ist f nicht diagonalisierbar, so hat f keinen Eigenwert. **Falsch**: ein Gegenbeispiel ist eine Blockdiagonalmatrix mit einem 1×1-Block (darin steht ein Eigenwert) und einem 2×2-Block, der eine Drehmatrix zu einem Winkel $\neq 0, \pi$ enthält.	☐	☐
Hat W eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von h, so ist h diagonalisierbar. **Wahr**: Diagonalisierbarkeit ist Äquivalent zur Existenz einer Basis aus Eigenvektoren.	☐	☐
Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind stets orthogonal zueinander. **Falsch**: diese Aussage ist nur sinnvoll in Euklidischen bzw. Unitären Räumen, dies ist hier aber nicht vorausgesetzt. Aber selbst in diesem Fall ist die Aussage falsch: die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ hat Eigenvektoren e_1 und $e_1 + e_2$, diese sind nicht orthogonal.	☐	☐

Aufgabe 2

Beweisen Sie die Nilpotenz der folgenden Endomorphismen und bestimmen Sie Jordanbasen:

a) $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto e_3 + e_4$, $e_3 \mapsto 0$, $e_4 \mapsto e_3$

b) $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, $e_1 \mapsto e_2 + e_3 + e_4$, $e_2 \mapsto e_3$, $e_3 \mapsto 0$, $e_4 \mapsto e_3$

Lösung:
a) Die Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ist also

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält dadurch $\mathrm{Eig}_0(f) = \ker(f) = \langle e_3 \rangle$. Weiter erhält man $\ker(f^2) = \langle e_3, e_3 + e_4 \rangle$, $\ker(f^3) = \langle e_3, e_3 + e_4, e_2 \rangle$ und $\ker(f^4) = \langle e_2, e_3, e_3 + e_4, e_1 \rangle$ mit $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3 + e_4$ und $f(e_3 + e_4) = e_3$. Demnach ist f nilpotent mit Jordanbasis $\mathcal{C} = (e_3, e_3 + e_4, e_2, e_1)$ und darstellender Matrix

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ist also

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält dadurch $\mathrm{Eig}_0(f) = \ker(f) = \langle 3e_3, e_2 - e_4 \rangle$. Weiter erhält man $\ker(f^2) = \langle 3e_3, e_2 - e_4, e_2 + e_3 + e_4 \rangle$, $\ker(f^3) = \langle e_1, 3e_3, e_2 - e_4, e_2 + e_3 + e_4 \rangle$ mit $f(e_1) = e_2 + e_3 + e_4$, $f(e_2 + e_3 + e_4) = 3e_3$. Demnach ist f nilpotent mit Jordanbasis $\mathcal{C} = (e_2 - e_4, 3e_3, e_2 + e_3 + e_4, e_1)$ und darstellender Matrix

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Abstand der Kugel $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x - (3, 1, -1)|| = 1\}$ von der Ebene $E = \langle e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt.
Lösung:
Zunächst berechnet man die orthogonale Projektion $\tilde{P}$ des Mittelpunkts $P = (3, 1, -1)$ des Kreises auf die Ebene, um den Abstand von P von der Ebene zu bestimmen. Dazu betrachte zum Beispiel die Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0))$ von E. Es gilt

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}\langle (1, -1, 0), (-3, -1, 1) \rangle (1, -1, 0) + \frac{1}{3}\langle (1, 1, 1), (-3, -1, 1) \rangle (1, 1, 1) = (-2, 0, -1).$$

Damit gilt für den Abstand $d(E, P) = d(\tilde{P}, P) = \sqrt{\langle \tilde{P} - P, \tilde{P} - P \rangle} = \sqrt{\langle (1, 1, -2), (1, 1, -2) \rangle} = \sqrt{6}$. Nun muss man noch den Radius des Kreises abziehen und erhält $d(V, E) = \sqrt{6} - 1$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie Eigen- und Haupträume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

und beweisen Sie, dass A ähnlich zu einer Matrix B in Jordan-Normalform ist. Bestimmen Sie ein solches B.
Lösung:
Zunächst berechnet man das charakteristische Polynom χ_A, indem man nach der dritten Spalte entwickelt und anschließend zum Beispiel die Sarrusregel anwendet. Man erhält $\chi_A = (X+1)^2(X+2)^2$. Demnach sind die Eigenwerte -1 und -2. Dann berechnet man die Eigen- bzw. Haupträume:

$$\mathrm{Eig}_{-1}(f) = \ker(-1\cdot E_4 - A) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle e_3 \rangle,$$

$$\mathrm{Hau}_{-1}(f) = \ker((-1\cdot E_4 - A)^2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle e_3, (0,-1,0,2) \rangle,$$

$$\mathrm{Eig}_{-2}(f) = \ker(-2\cdot E_4 - A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0,1) \rangle$$

und

$$\mathrm{Hau}_{-2}(f) = \ker((-2\cdot E_4 - A)^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0,1), (1,1,0,0) \rangle.$$

Beachte, dass die Haupträume jeweils zweidimensional sind, weil die algebraische Vielfachheit der beiden Eigenwerte zwei ist. Damit folgt, dass A ähnlich zu

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ des $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt existiert, so dass (b_1, b_2, b_3) eine Basis von $(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)^\perp$ ist.
Lösung:
Betrachte die Basis $\mathcal{C} = ((1,0,1,0), (0,1,0,1), (-1,1,1,-1))$ von $(e_1+e_2-e_3-e_4)^\perp$ und ergänze diese mit $(e_1+e_2-e_3-e_4)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$. Die Vektoren sind bereits paarweise orthogonal. Demnach ist $\mathcal{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1), \frac{1}{2}(-1,1,1,-1), \frac{1}{2}(1,1,-1,-1))$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$, die den geforderten Bedingungen genügt.

Aufgabe 6

Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Beweisen Sie: f ist genau dann selbstadjungiert und orthogonal, wenn V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten 1 und -1 besitzt.

Beweis:

Da f selbstadjungiert ist, gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V aus Eigenvektoren von f (insbesondere ist f diagonalisierbar). Da f orthogonal ist, gilt für alle Eigenwerte λ_i zu b_i, dass $|\lambda_i| = 1$, also $\lambda_i \in \{-1, 1\}$, denn $1 = \langle b_i, b_i \rangle = \langle f(b_i), f(b_i) \rangle = \langle \lambda_i b_i, \lambda_i b_i \rangle = \lambda_i^2 \langle b_i, b_i \rangle$.

Wenn V eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $1, -1$ besitzt, so hat $M_{\mathcal{B}}(f)$ Diagonalgestalt und ist insbesondere symmetrisch. Daraus folgt, dass f selbstadjungiert ist (das sieht man auch mit $\langle b_i, f(b_j) \rangle = 0 = \langle f(b_i), b_j \rangle$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, f(b_i) \rangle = \langle b_i, \lambda_i b_i \rangle = \langle \lambda_i b_i, b_i \rangle = \langle f(b_i), b_i \rangle$, indem man anschließend die Bilinearität des Skalarprodukts ausnutzt). Da zudem $M_{\mathcal{B}}(f)^t = M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$, ist $M_{\mathcal{B}}(f)$ orthogonal, also auch f. Auch hier kann man alternativ $\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$ für die Basis nachrechnen und dann die Bilinearität des Skalarprodukt ausnutzen.