Tutorium zur Linearen Algebra I
Blatt 9
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Seien $A = (a_{ij})$ und $A' = (a'_{ij})$ zwei $m \times (n+1)$-Matrizen über einem Körper. Weiter entstehe A' aus A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen. Zeigen Sie, dass $SE(a_{ij}) = SE(a'_{ij})$.

Aufgabe 2

Ist U eine Untergruppe einer Gruppe $(G, \cdot)$, so heißt eine Teilmenge T von G eine Linksnebenklasse von U (bzw. Rechtsnebenklasse von U), wenn es ein $a \in G$ gibt, so dass $T = a \cdot U$ (bzw. $T = U \cdot a$).

Sei U eine Untergruppe einer Gruppe $(G, \cdot)$. Seien S, T zwei Linksnebenklassen von U. Zeigen Sie:

a) $|T| = |U|$

b) Für jedes $a \in T$ ist $T = a \cdot U$ und für jedes $a \in G - T$ ist $T \neq a \cdot U$.

c) Ist $S \cap T \neq \emptyset$, so ist $S = T$.

d) G ist die Vereinigung aller Linksnebenklassen von U.

Analoge Aussagen gelten für die Rechtsnebenklassen von U.

Aufgabe 3

Sei $f : (G, \cdot) \to (H, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) $f(e_G) = e_H$

b) Für alle $x \in G$ gilt $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

c) $\ker(f) := \{x \in G \mid f(x) = e_H\}$ ist eine Untergruppe von G und $\mathrm{im}(f) := \{f(x) \mid x \in G\}$ ist eine Untergruppe von H.

Aufgabe 4

Sei $f : (G, \cdot) \to (H, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) Ist $b \in H$ und $a \in f^{-1}(b)$, so ist $f^{-1}(b) = a \cdot U = U \cdot a$ mit $U := \ker(f)$.

b) f ist injektiv genau dann, wenn $\ker(f) = \{e_G\}$.

c) Sind G und H endlich und ist f surjektiv, so gilt $|G| = |\ker(f)| \cdot |H|$.

Aufgabe 5

Ist $n \geq 2$, so gilt für die alternierende Gruppe A_n, dass $|A_n| = \frac{1}{2} \cdot n!$.