Tutorium zur Linearen Algebra I
Blatt 8
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) Jede obere Dreiecksmatrix ist eine Matrix in Zeilenstufenform.

b) Eine obere Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn alle Diagonalelemente ungleich Null sind.

c) Eine obere Dreiecksmatrix ist genau dann nilpotent, wenn alle Diagonalelemente gleich Null sind.

d) Eine untere Dreiecksmatrix ist genau dann nilpotent, wenn alle Diagonalelemente gleich Null sind.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) Ein lineares Gleichungssystem über einem Körper K in n Unbestimmten ist genau dann homogen, wenn die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems ein Untervektorraum von K^n ist.

b) Ein lineares Gleichungssystem in n Unbestimmten bestehend aus m Gleichungen mit $n > m$ hat immer eine Lösung.

c) Jedes homogene lineare Gleichungssystem in n Unbestimmten bestehend aus m Gleichungen mit $m > n$ hat eine Lösung $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.

d) Jedes homogene lineare Gleichungssystem in n Unbestimmten bestehend aus m Gleichungen mit $m < n$ hat eine Lösung $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.

e) Für ein homogenes lineares Gleichungssystem $E(a_{ij} \mid i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots n+1)$ in n Unbestimmten bestehend aus m Gleichungen und die entsprechende Matrix $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots n}$ gilt:

   a) $\dim SE(a_{ij}) \geq \mathrm{rk}(A)$

   b) $\dim SE(a_{ij}) \leq \mathrm{rk}(A)$

   c) Es besteht kein Zusammenhang zwischen $\dim SE(a_{ij})$ und $\mathrm{rk}(A)$.

Aufgabe 3

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement. Eine Teilmenge $I \subseteq R$ heißt Ideal, wenn folgendes gilt:

1. $0 \in I$
2. Für alle $x, y \in I$ gilt $x + y \in I$.
3. Für alle $x \in R$ und alle $y \in I$ gilt $x \cdot y \in I$ und $y \cdot x \in I$.

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und I ein Ideal des Rings $M(n \times n, K)$, so dass $I \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass I das Einselement von $M(n \times n, K)$ enthält und somit $I = M(n \times n, K)$ gilt.