Tutorium zur Linearen Algebra I
Blatt 7
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ Ringe und sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) $f(0) = 0$

b) Ist f bijektiv , so ist $f^{-1} : S \to R$ ein Ringhomomorphismus.

c) Sind $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ Ringe mit Einselement und ist f surjektiv, so ist $f(1_R) = 1_S$.

d) Geben Sie ein Beispiel eines injektiven Ringhomomorphismus $f : R \to S$ zwischen Ringen mit Einselement an, so dass $R \neq \{0\}$ und $f(1_R) \neq 1_S$.

Hinweis: Für Ringe $(U, +, \cdot)$ und $(V, +, \cdot)$ ist das Tripel $(U \times V, +, \cdot)$ ebenfalls ein Ring, wobei $+$ und $\cdot$ auf $U \times V$ die komponentenweise Addition und Multiplikation sind, d.h.

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$$

bzw.

$$(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) := (u_1 \cdot u_2, v_1 \cdot v_2).$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Basen $\mathcal{A} = ((1, 0), (0, 1))$ und $\mathcal{B} = ((1, 1), (2, 0))$ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^2$ und die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \ (x, y) \mapsto (2x + y, 3x - 2y).$$

Bestimmen Sie:

a) $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$

b) Ein $T \in GL(2, \mathbb{Q})$ mit $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = T^{-1} M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} T$.

c) Ein $T \in GL(2, \mathbb{Q})$ mit $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = T^{-1} M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} T$.

Aufgabe 3

a) Seien $A \in M(m \times 1, K)$ und $B \in M(1 \times n, K)$. Bestimmen Sie $\mathrm{rk}(AB)$.

b) Seien $A, B \in M(m \times n)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{rk}(A + B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B). \tag{1}$$

Geben Sie für $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ zwei Beispiele an, so dass in (1) je einmal $<$ bzw. $=$ gilt.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen a) - e) sind wahr, welche falsch? Sind

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

lineare Abbildungen zwischen endlich-erzeugten K-Vektorräumen, so ist

a) $\mathrm{rk}(f) \geq \dim\ker(f)$.

b) $\mathrm{rk}(f+f) = \mathrm{rk}(f)$.

c) $\mathrm{rk}(g \circ f) \geq \max(\mathrm{rk}(g), \mathrm{rk}(f))$.

d) $\mathrm{rk}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rk}(g), \mathrm{rk}(f))$.

e) Ist g surjektiv, so ist $\mathrm{rk}(g \circ f) = \mathrm{rk}(f)$.