Tutorium zur Linearen Algebra I
Blatt 6
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit $V \neq \{0\}$. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $f_i : V \to K$ die lineare Abbildung mit $f_i(v_i) = 1$ und $f_i(v_j) = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\} - \{i\}$.
Zeigen Sie, dass $(f_1, \ldots, f_n)$ eine Basis des K-Vektorraums $\mathrm{Hom}(V, K)$ ist.

Aufgabe 2

a) Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ ein Ring mit Einselement ist.

b) Zeigen Sie, dass $f \in \mathrm{End}(V)$ genau dann eine Einheit des Rings $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ ist, wenn f bijektiv ist. Die Einheitengruppe des Rings $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ wird mit $GL(V)$ bezeichnet.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Zeigen Sie, dass der Ring $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ genau dann kommutativ ist, wenn $\dim V \leq 1$.

Aufgabe 4

Betrachtet wird die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, x_2) \mapsto (\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2).$$

a) Zeigen Sie, dass für eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ von $\mathbb{R}^2$ folgende Aussagen äquivalent sind:
   - $f(v_1) = 2v_1$ und $f(v_2) = v_2$
   - $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^2$, die a) erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist und bestimmen Sie für die Basis $\mathcal{A}$ aus b) die Matrix $M_{f^{-1},\mathcal{A},\mathcal{A}}$.