Tutorium zur Linearen Algebra I
Blatt 5
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Seien V und W zwei endlich erzeugte K-Vektorräume. Zeigen Sie:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   - $\dim V \leq \dim W$
   - Es gibt eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$.

b) Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ sind äquivalent:
   - f ist surjektiv.
   - Es gibt einen Untervektorraum T von V, so dass $f|_T : T \to W$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2

Seien W_1, W_2 zwei Untervektorräume eines endlich erzeugten Vektorraums V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $V = W_1 \oplus W_2$

b) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$.

c) $W_1 + W_2 = V$ und $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

a) Für $A, B \in M(m \times n, K)$ und $C \in M(n \times l, K)$ ist
$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C).$$

b) Für $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times l, K)$ ist
$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA.$$

Aufgabe 4

Sei K ein Körper. Ein $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ heißt Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Sei $D(n, K)$ die Menge aller Diagonalmatrizen in $M(n \times n, K)$. Beweisen Sie:

a) $D(n, K)$ ist ein Untervektorraum von $M(n \times n, K)$. Welche Dimension hat $D(n, K)$?

b) Für A, $B \in D(n, K)$ gilt $A \cdot B \in D(n, K)$.

c) Ein $A = (a_{ij}) \in D(n, K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_{ii} \neq 0$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.