Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Ist $\mathbb{R}^4$ die direkte Summe der Untervektorräume V_1 und V_2?

a) $V_1 = \langle (1,0,0,0), (0,0,0,1) \rangle$, $V_2 = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$

b) $V_1 = \langle (2,3,0,4) \rangle$, $V_2 = \langle (0,0,0,1), (0,0,1,0) \rangle$

c) $V_1 = \langle (1,0,0,0), (1,1,1,1) \rangle$, $V_2 = \langle (0,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

Aufgabe 2

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Setze

$$V' = \{(v,0) \mid v \in V\} \subseteq V \times W,$$

$$W' = \{(0,w) \mid w \in W\} \subseteq V \times W.$$

Zeigen Sie:

a) V' und W' sind Untervektorräume von $V \times W$.

b) V ist isomorph zu V' bzw. W ist isomorph zu W'.

c) $V \times W = V' \oplus W'$.

Aufgabe 3

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- $\ker(f) \subseteq U$
- $U = f^{-1}(f(U))$

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

a) Sind $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen, so ist auch $g \circ f : U \to W$ eine lineare Abbildung.

b) Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und ist W' ein Untervektorraum von W, so ist $f^{-1}(W')$ ein Untervektorraum von V.

c) Für jede Abbildung $l : X \to Y$ zwischen Mengen ist die Abbildung

$$M(Y,K) \to M(X,K),\ f \mapsto f \circ l$$

linear.