Tutorium zur Linearen Algebra I
Blatt 3
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Zeigen Sie

a)
$$\{f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist differenzierbar } \}$$
ist kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}$-Vektorraums $M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b)
$$\{f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \text{ es gibt ein } x \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x\}$$
ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}$-Vektorraums $M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 2

Welche Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) Sei V ein Vektorraum mit $\dim V = n$ und seien $v_1, \dots, v_n$, so dass $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Dann ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V.

b) Sei V ein Vektorraum mit $\dim V = n$ und sei $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig. Dann ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V.

c) Ist V ein Vektorraum und $(v_1, v_2, v_3) \in V^3$ linear unabhängig, so sind auch $(v_1) \in V$, $(v_1, v_2) \in V^2$ und $(v_2, v_1) \in V^2$ linear unabhängig.

d) Ist V ein Vektorraum und $(v_1, v_2, v_3) \in V^3$, so dass $(v_i, v_j) \in V^2$ linear unabhängig für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$, so ist $(v_1, v_2, v_3) \in V^3$ linear unabhängig.

Aufgabe 3

Seien S und T Untervektorräume eines Vektorraums V, so dass $S \cap T = \{0\}$. Seien $(s_1, \dots, s_n) \in S^n$ und $(t_1, \dots, t_m) \in T^m$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass
$$(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m) \in V^{n+m}$$
linear unabhängig ist.

Aufgabe 4

a) Gilt in dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^3$, dass
$$(5, 1, 4) \in \langle (7, 1, 4), (5, 2, 0) \rangle?$$

b) Bestimmen Sie $\dim U$ für
$$U := \langle (7, 1, 4), (5, 2, 0), (5, 1, 4) \rangle \in \mathbb{Q}^3.$$