Tutorium zur Linearen Algebra I
Blatt 2
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei X eine Menge. Dann bezeichnet $P(X)$ die Menge aller Teilmengen von X, die Potenzmenge von X. Betrachte die Abbildungen

$$+ : P(X) \times P(X) \to P(X),\ (A, B) \mapsto (A \cup B) - (A \cap B)$$

und

$$\cdot : P(X) \times P(X) \to P(X),\ (A, B) \mapsto A \cap B.$$

Das Tripel $(P(X), +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement.

1. Bestimmen Sie das Null- und das Einselement dieses Rings.
2. Bestimmen Sie die Einheiten dieses Rings.
3. Zeigen Sie, dass dieser Ring genau dann ein Körper ist, wenn X genau ein Element enthält.

Aufgabe 2

Wir gehen von dem vertrauten Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ aus. Auf der Menge $A := \{0, 1, 2\}$ definiert man Verknüpfungen

$$\oplus : A \times A \to A,\ a \oplus b := a + b \text{ für alle } (a, b) \in (A \times A) - \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

und $1 \oplus 2 := 0$, $2 \oplus 1 := 0$ und $2 \oplus 2 := 1$ bzw.

$$\odot : A \times A \to A,\ a \odot b := a \cdot b \text{ für alle } (a, b) \in (A \times A) - \{(2, 2)\}$$

und $2 \odot 2 := 1$.
Dann ist $(A, \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement. Zeigen Sie die Distributivität. Ist $(A, \oplus, \odot)$ ein Körper?

Aufgabe 3

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$?

1. $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 1\}$
2. $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$
3. $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{ es gibt ein } i \in \{1, \ldots, n\}, \text{ so dass } x_i = 0\}$
4. $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 4x_1 - x_n = x_{n-1}\}$

Aufgabe 4

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $a \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$f : G \to G,\ x \mapsto axa^{-1},$$
$$g : G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$$

jeweils bijektiv sind.