Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_3 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, x_3 + 5x_4, x_4),$$

und zeigen Sie, dass 1 und 3 die Eigenwerte von f sind.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$$

das charakteristische Polynom $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in K[X]$ besitzt.

Aufgabe 3

a) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_1, 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_4, 2x_1 - 4x_2 + x_3).$$

Ist f triagonalisierbar? Ist f diagonalisierbar? Falls f diagonalisierbar ist, bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^4$, so dass $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Diagonalmatrix ist.

b) Sei $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_1, 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_4, 2x_1 - 4x_2 + x_3).$$

Ist f triagonalisierbar? Ist f diagonalisierbar? Falls f diagonalisierbar ist, bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{C}^4$, so dass $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es eine Diagonalmatrix $D \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$ und ein $T \in GL(4, \mathbb{C})$ gibt, so dass $D = T^{-1}AT$. Bestimmen Sie so ein D bzw. T.