Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Roland Huber
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, indem Sie mit Determinanten argumentieren, dass eine obere Dreiecksmatrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ genau dann invertierbar ist, wenn $a_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

b) Sei $A \in GL(n, K)$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, dass A^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. Und zwar:

- mit Hilfe der Adjunkten von A
- indem Sie A^{-1} durch elementare Zeilenumformungen gewinnen

c) Zeigen Sie, dass $\{A \in GL(n, K) \mid A \text{ ist obere Dreiecksmatrix }\}$ eine Untergruppe von $GL(n, K)$ ist.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper. Für ein Polynom $p = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \in K[X]$ definiert man eine formale Ableitung durch

$$p' := a_1 + (2a_2)X + \ldots + (na_n)X^{n-1} \in K[X].$$

Dann gelten für alle $p, q \in K[X]$ und $a \in K$, dass

$$(p + q)' = p' + q',\ (pq)' = p'q + pq' \text{ und } (ap)' = ap'.$$

Sei $a \in K$ eine Nullstelle eines Polynoms $K[X] - \{0\}$. Zeigen Sie, dass $a \in K$ genau dann eine mehrfache Nullstelle von p ist (d.h., dass die Vielfachheit größer als 1 ist), wenn a eine Nullstelle von p' ist.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^2 - X + 1 \in K[X]$ keine mehrfache Nullstelle hat. Kann das Polynom $X^2 - 1 \in K[X]$ mehrfache Nullstellen haben?

Aufgabe 4

Sei V ein K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie, dass $\lambda^2 + 1 \in K$ ein Eigenwert des Endomorphismus $f^2 + \mathrm{id}_V$ ist.

Aufgabe 5

Seien V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Seien weiter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ Eigenwerte von f mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Sei v_i ein Eigenvektor zu λ_i für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist.