Nachklausur zur Linearen Algebra I
Sommersemester 2013
30. September 2013, 10 - 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Klaus Bongartz
Dr. Thorsten Weist

Bitte tragen Sie die folgenden Daten leserlich und in Blockschrift ein:

Name	Vorname	Matrikelnummer
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Max. Punktzahl	4	4	4	4	4	4	24	
erreichte Punktzahl								

Stets ist k ein kommutativer Körper. Alle auftretenden Vektorräume sind endlichdimensional.

Aufgabe 1

a) Wann ist eine Teilmenge $\mathcal{B}$ eines Vektorraumes V eine Basis?

b) Wie lautet die Formel von Leibniz für die Determinante einer Matrix in $k^{n \times n}$?

c) Formulieren Sie den Rangsatz.

d) Definieren Sie das Signum einer Permutation.

Aufgabe 2

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & a^3 & 1+a^2 \\ -a & 0 & a-a^2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a und die inverse Matrix, falls sie existiert.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es sei $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ die lineare Abbildung mit $f(x) = Ax$.

a) Zeigen Sie, dass $\psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\psi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\psi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ eine geordnete Basis $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ von $\mathbb{Q}^3$ liefern.

b) Bestimmen Sie $M_\psi(f)$.

c) Geben Sie eine Basis vom Bild von f an.

Aufgabe 4

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort durch einen kleinen Beweis oder durch ein einfaches Gegenbeispiel.

a) Sei $A \in k^{m\times n}$, $b \in k^m$. Hat $Ax = b$ für ein b genau eine Lösung, so ist n der Rang von A.

b) Für drei Unterräume X, Y, Z eines Vektorraumes V gilt

$$\dim(X + Y + Z) = \dim X + \dim Y + \dim Z - \dim X \cap Y - \dim X \cap Z - \dim Y \cap Z.$$

c) Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann surjektiv, wenn sie jedes Erzeugendensystem von V auf ein Erzeugendensystem von W abbildet.

d) Seien V und W Vektorräume und $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ beide injektiv. Dann ist $f + g$ injektiv.

Aufgabe 5

a) Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A.

b) Sei A eine 3×3-Matrix mit reellen Koeffizienten, die der Bedingung $A^2 = 3A$ genügt. Zeigen Sie, dass die Determinante von A entweder 0 oder 27 ist. Treten die beiden Fälle wirklich auf?

Aufgabe 6

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei M die Menge aller Unterräume von V, N die Menge der Unterräume von W.

a) Zeigen Sie, dass für jeden Unterraum V' von V gilt, dass $f(V')$ ein Unterraum von W ist.

b) Man erhält also mit Teil a) eine Abbildung $F : M \to N$, wobei $FV' := f(V')$. Zeigen Sie, dass F genau dann injektiv ist, wenn f injektiv ist.