Nachklausur zur Linearen Algebra I - Nr. 1
Sommersemester 2011
06.10.2011, 10 - 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Bitte tragen Sie die folgenden Daten leserlich und in Blockschrift ein:

Name	Vorname	Matrikelnummer
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Max. Punktzahl	8	4	4	4	4	4	28	
erreichte Punktzahl								

Eine Bemerkung vorweg: bei Beaufsichtigung und Korrektur der Nachklausur fiel auf, dass viele Teilnehmer anscheinend folgende "Strategie" benutzt haben: "die Beweisaufgabe lasse ich aus Prinzip weg, und die Multiple-Choice-Aufgabe mache ich eben in den letzten paar Minuten". Damit sind 12 der 28 Punkte WEG, und von den restlichen 16 Punkten 14 erreichen zu wollen erfordert einige Perfektion bei den Rechenaufgaben. Diese Strategie ist also sehr gewagt....
Die Beweisaufgabe hat, wenn man nur irgendwie bereit ist, sie sich anzusehen, eine sehr kurze Lösung (siehe unten). Sie ist außerdem als Übungsaufgabe wohlbekannt und kommt ca. in jeder zweiten LA I-Klausur vor. Warum sieht sich trotzdem fast niemand die Aufgabe an?
Der Multiple-Choice-Teil erfordert immer einiges Nachdenken, also sollte man mindestens 20 Minuten dafür einplanen! Bei der Korrektur fiel auf, dass viele Teilnehmer deutlich mehr falsche als richtige Antworten gegeben haben - diese Aufgabe muss wesentlich ernster genommen werden!

Aufgabe 1

Im Folgenden seien alle Vektorräume endlich-dimensional. Kreuzen Sie an (für jede richtige Antwort gibt es 1/2 Punkt, jede falsche Antwort kostet 1/2 Punkt):
Jedes linear abhängige Erzeugendensystem eines Vektorraums lässt sich zu einer Basis verkürzen.
Wahr: der Zusatz "linear abhängig" ist hier unwichtig. Dies ist der Basisauswahlsatz.
Für den Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$ gilt $\dim \mathrm{Kern(f)} \leq \dim \mathrm{W}$.
Falsch: die Abbildung $0 : V \to 0$ ist ein Gegenbeispiel, denn dann ist $\mathrm{Kern(f)} = \mathrm{V}$, aber nicht unbedingt $\dim V \leq \dim W = 0$! Richtig wäre nur $\dim \mathrm{Kern}(f) \leq \dim V$, da $\mathrm{Kern}(f)$ ein Unterraum von V ist.
Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(1, 0) = (0, 1)$, $f(0, 1) = (1, 1)$ und $f(1, 1) = (1, 2)$.
Wahr: nach einem Satz aus der Vorlesung kann man eine lineare Abbildung durch Vorgabe der Bilder auf einer Basis eindeutig definieren. Die Basis ist hier $(1, 0), (0, 1)$, und zu überprüfen ist, ob die dritte Vorgabe damit verträglich ist. Das ist sie, denn $f(1, 1) = f(1, 0) + f(0, 1) = (0, 1) + (1, 1) = (1, 2)$.
Surjektive lineare Abbildungen $f : V \to V$ bilden linear unabhängige Tupel auf linear unabhängige Tupel ab.
Wahr: nach einem Satz aus der Vorlesung ist ein surjektiver Endomorphismus $f : V \to V$ schon bijektiv, und bijektive lineare Abbildungen bilden linear unabhängige Tupel auf linear unabhängige Tupel ab.
Seien $U, W \subseteq V$ Unterräume mit $V \neq U + W$. Dann gilt $\dim V > \dim U + \dim W$.
Falsch: sei zum Beispiel $U = W$ eine Ebene in $V = K^3$. Dann ist $\dim U + \dim W = 4 > 3 = \dim V$.
Für zwei Matrizen A, $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Wahr: das ist der Determinantenmultiplikationssatz.
Für lineare Abbildungen $f : V \to W$ zwischen Vektorräumen sind injektiv und surjektiv äquivalent.
Falsch: die Nullabbildung $0 : V \to 0$ ist surjektiv, aber sicher nicht injektiv. Obige Aussage gilt nur falls $V = W$ endlichdimensional (nach Satz aus der Vorlesung).
Für eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
Wahr: das ist eine der Rechenregeln für Determinanten aus der Vorlesung.
Der Lösungsraum von $A \cdot x = 0$ mit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist genau dann mindestens eindimensional, wenn $\det(A) = 0$.
Wahr: das homogene LGS hat genau dann eine Lösung ungleich 0, wenn A nicht Höchstrang hat, und dies ist äquivalent zu $\det(A) = 0$.
Der Lösungsraum von $A \cdot x = b$, wobei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertierbar ist, kann leer sein.
Falsch: da A invertierbar ist, ist $x = A^{-1}b$ immer eine Lösung (und zwar die einzige).
Jedes linear unabhängige Tupel aus Vektoren eines Vektorraums lässt sich zu einer Basis verlängern.
Wahr: das ist der Basisergänzungssatz.
Sei U ein Untervektorraum von V. Jede Basis von V kann zu einer Basis von U verkürzt werden.
Falsch: sei zum Beispiel $V = K^2$, dann ist $(1,0),(0,1)$ eine Basis. Sei U die Ursprungsgerade durch $(1,1)$. Dann kann man obige Basis nicht zu einer Basis von U verkürzen.
Für alle oberen Dreiecksmatrizen $D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit Diagonalelementen $d_1, \dots, d_n$ gilt $\det(D) = 0$ genau dann, wenn $d_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.
Falsch: es gilt $\det(D) = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$. Dies ist genau dann gleich 0, wenn eine der Zahlen d_i gleich 0 ist (und nicht wenn alle gleich 0 sind).
Für zwei Unterräume $U, W \subseteq V$ gilt $U \cap W = W$, wenn $W \subset U$.
Wahr: liegt W in U, so ist der Schnitt von W und U natürlich W.
Es gibt Matrizen $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, so dass der Spaltenrang echt größer als n ist.
Falsch: der (Zeilen-/Spalten-)Rang einer Matrix ist immer kleinergleich n.
Für einen Vektorraum V definiert $v \sim w$ genau dann, wenn (v, w) linear abhängig ist, eine Äquivalenzrelation auf $V \backslash \{0\}$.
Wahr: zwei Vektoren $v, w \neq 0$ sind also äquivalent, wenn sie auf der gleichen Ursprungsgeraden liegen. Damit sieht man sofort, dass die Axiome einer Äquivalenzrelation erfüllt sind.

Aufgabe 2

Seien die zwei Untervektorräume U und V von $\mathbb{R}^4$ definiert durch

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = x_1 + x_3,\ x_1 = x_3 + x_4\}$$

und

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - x_3 = x_1 - x_4\}.$$

Bestimmen Sie Basen von U, V und $U \cap V$ und ergänzen Sie die Basis von U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

Lösung: Ein Vektor aus U hat die Form $(x_3 + x_4, 2x_3 + x_4, x_3, x_4)$. Damit ist $((1,2,1,0),(1,1,0,1))$ eine Basis von U. Eine Vektor aus V hat die Form $(x_2 - x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4)$, also ist zum Beispiel $((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$ eine Basis von V.
Setzt man $x_1 = x_2 - x_3 + x_4$ in die zweite Gleichung ein, so erhält man $x_2 = 2x_3$ und damit $x_4 = 0$ unter Verwendung der ersten Gleichung und damit $x_1 = x_3$. Also haben die Vektoren aus $U \cap V$ die Form $(x_3, 2x_3, x_3, 0)$ und somit ist $(1,2,1,0)$ eine Basis von $U \cap V$. Wie man leicht sieht, ist auch $((1,2,1,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$ eine Basis von V. Insbesondere kann die obige Basis von U also durch $((-1,0,1,0),(1,0,0,1))$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildung $f : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^4$, die durch

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \end{pmatrix}$$

gegeben sei.

Lösung: Die Abbildung f ist also l_A für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist $\mathrm{Kern}(l_A) = \mathbf{L}_{A,0}$, wir müssen also das durch A definierte homogene LGS lösen. Dazu bringen wir die Matrix auf Zeilenstufenform: wir ziehen die erste Zeile von der zweiten ab, ziehen das Vierfache der ersten Zeile von der dritten ab und addieren das Doppelte der ersten Zeile auf die vierte und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ziehen wir das Dreifache der zweiten Zeile von der dritten ab, addieren das Doppelte der zweiten Zeile zur vierten, und halbieren die zweite Zeile und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun addieren wir noch die dritte Zeile zur vierten und erhalten die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \quad x_2 - x_3 - x_4 = 0, \quad x_3 + x_4 - x_5 = 0.$$

Wir können also x_4 und x_5 frei wählen und nach den restlichen Variablen auflösen:

$$x_3 = -x_4 + x_5, \quad x_2 = x_3 + x_4 = (-x_4 + x_5) + x_4 = x_5, \quad x_1 = x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = x_5 - (-x_4 + x_5) - x_4 - x_5 = -x_5.$$

Damit besteht der Kern der Abbildung f also aus allen Vektoren der Form

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-x_5, x_5, -x_4 + x_5, x_4, x_5).$$

Aufgabe 4

Sei V ein endich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$, d.h. dass $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ und $\mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f) = V$.

Lösung: Sei $v \in \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f)$. Wegen $v \in \mathrm{Kern}(f)$ gilt also $f(v) = 0$ und wegen $v \in \mathrm{Bild}(f)$ gibt es ein w mit $v = f(w)$. Also gilt $0 = f(v) = f(f(w)) = (f \circ f)(w) = f(w) = v$, d.h. $0 = v$. Dies zeigt die erste Behauptung. Die zweite folgt aus den Dimensionsformeln für Unterräume bzw. für Kern und Bild:

$$\dim(\mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f)) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) - \dim(\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f)) =$$

$$= \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V,$$

also $\dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = V$.

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Tupel

$$\mathcal{A} = ((1,1,0),(1,0,1)(0,1,1)) \text{ bzw. } \mathcal{B} = ((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,-1,1),(1,0,0,1))$$

und die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4,\ (x,y,z) \mapsto (-x+y+z, -x-z, -2x+2y, -x-z).$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von $\mathbb{Q}^3$ bzw. $\mathbb{Q}^4$ sind und bestimmen Sie $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$.

Lösung: Die Abbildung f ist also durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir schreiben die Basen in die Spalten von Matrizen A bzw. B, die also so aussehen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dass $\mathcal{A}$ wirklich eine Basis ist, kann man durch Nachweis der Invertierbarkeit von A überprüfen. Dies sieht man leicht, in dem man die Determinante von A berechnet, die -2 ist. Um die Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{A}$ unter f zu berechnen, multiplizieren wir C mit A zu

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese drei Spalten müssen wir jeweils als Linearkombination der Elemente aus $\mathcal{B}$, d.h. der Spalten von B, darstellen. Dazu lösen wir drei LGS gleichzeitig, in dem wir die erweiterte Matrix

$$(CA|B) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

betrachten und den linken Block durch Zeilenoperationen auf die Form einer Einheitsmatrix bringen. Es ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Dass man diese Form erreicht, zeigt nebenbei auch, dass B wirklich Höchstrang hatte, d.h. dass $\mathcal{B}$ wirklich eine Basis ist. Im rechten Block stehen nun spaltenweise die Koordinaten der Bilder der Basis, d.h. die gesuchte darstellende Matrix.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

b) Bestimmen Sie den Rang und die Determinante der Matrix

$$B_{\lambda_1,\lambda_2} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

in Abhängigkeit von λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Lösung: In der ersten Spalte von B stehen drei Nullen, also führen wir Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalten durch und wenden dann die Regel von Sarrus an:

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}) = -2\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}) = -2(0+1+8-0-0-0) = -18.$$

Auch für die zweite Determinante wenden wir (zweimal) Laplaceentwicklung an und erhalten

$$\det(B_{\lambda_1,\lambda_2}) = -\lambda_1^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = -\lambda_1^2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2).$$

Also ist die Determinante genau dann Null, wenn $\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_2 = \lambda_1$ oder $\lambda_2 = -\lambda_1$; in allen anderen Fällen ist die Determinante ungleich 0 und die Matrix damit vom Rang 4. Im ersten Fall sieht die Matrix so aus:

$$B_{0,\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist B_{0,λ_2} vom Rang 2 falls $\lambda_2 \neq 0$ und vom Rang 1, falls $\lambda_2 = 0$. Im zweiten Fall erhält man

$$B_{\lambda_1,\lambda_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $\lambda_1 \neq 0$ ist und die ersten beiden Zeilenvektoren linear abhängig sind, ist B_{λ_1,λ_1} also vom Rang 3. Im dritten Fall erhält man

$$B_{\lambda_1,-\lambda_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $\lambda_1 \neq 0$ ist und die ersten beiden Zeilenvektoren wiederum linear abhängig sind, ist $B_{\lambda_1,-\lambda_1}$ also vom Rang 3.