1) a) Der Rang einer linearen Abbildung ist definiert als Dimension des Bildraumes, also

$\operatorname{rang}(f) := \dim \operatorname{Bild}(f)$.

b) Für die Determinante einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ gilt

$$\det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, \det_{n-1}(A^{ij})$$

Dabei ist A^{ij} die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

c) Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\dim V = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f)$

d) Sei $\sigma \in S_n$. Dann ist $\operatorname{sgn}(\sigma) := \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

2) Sei $A(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 0 & -2a+a^2 \\ -a & -a^2 & a-a^3 \end{bmatrix}$

Betrachte folgende Umformungen:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|l} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & -2a+a^2 & 0 & 1 & 0 & II - I \\ -a & -a^2 & a-a^3 & 0 & 0 & 1 & III + a \cdot I \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -2a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} - a\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{II} + 2\cdot\mathrm{III} \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Rang}(A(a)) = \begin{cases} 3, & \text{falls } a \neq 0 \\ 1, & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

Sei nun $a \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1-a^2 & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 & -1+2a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -a^2+2a & 1 & 2-a \\ 0 & -a & 0 & -1+2a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} \cdot (-a)^{-1} \\ \mathrm{III} \cdot a^{-1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -a^2+2a & 1 & 2-a \\ 0 & 1 & 0 & a^{-1}-2 & -a^{-1} & -2a^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & a^{-1} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A(a)^{-1} = \begin{bmatrix} -a^2+2a & 1 & 2-a \\ a^{-1}-2 & -a^{-1} & -2a^{-1} \\ 1 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$$

3) a) Da der Rang der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ offenbar voll ist, ist Ψ eine Basis.

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

b) Es gilt $f(\psi_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \psi_1 + 0 \cdot \psi_2 + 0 \cdot \psi_3$,

$f(\psi_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \psi_2$,

$f(\psi_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \psi_1 + 3 \cdot \psi_3$

$$\Rightarrow M_\psi(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c) Bild(f) wird erzeugt von $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Offenbar gilt $f(e_1) + f(e_2) = f(e_3)$.

Da zudem $\{f(e_1), f(e_2)\}$ linear unabhängig ist, folgt, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis ist.

4) a) Betrachte $f_A : k^n \longrightarrow k^m$ definiert durch -4-

$f_A(x) = Ax$. Diese Abbildung ist nicht

injektiv nach Voraussetzung. Also $\dim \operatorname{Kern} f_A > 0$

Rangsatz

$\Rightarrow n = \dim k^n = \dim \operatorname{Bild} f_A + \dim \operatorname{Kern} f_A > \dim$

$> \dim \operatorname{Bild} f_A = \operatorname{Rang}(A)$ $\Rightarrow$ Aussage richtig

b) offenbar gilt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Aussage falsch

c) Es gilt für $n \geq 3$, dass $\sigma = (12) \circ (23) \neq (23) \circ (12) = \pi$,

da z.B. $\sigma(3) = 1 \neq 2 = \pi(3)$ $\Rightarrow$ Aussage falsch.

d) Sei $0 \neq f : V \to V$ und $g := -f$. Dann gilt

$$\{0\} = \operatorname{Bild}(0) = \operatorname{Bild}(f+g) \neq \operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Bild}(f) + \operatorname{Bild}(-f)$$

(offenbar gilt $\operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Bild}(-f)$)

5) a) Es gilt

$$\det_4\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \overset{\text{II}-\text{I}}{\underset{\substack{\text{III}-\text{I}\\ \text{IV}-\text{I}}}{=}} \det_4\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{III}-\text{II}}{\underset{\text{IV}-\text{II}}{=}} \det_4\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix} \overset{\text{IV}-\text{III}}{=} \det_4\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$$

$$= a(b-a)(c-b)(d-c)$$

b) Sei $A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\det_n(A) \underset{\substack{i\text{-te Zeile} - (i-1)\text{-te Zeile}\\ i=n,\dots,2}}{=} \det_n\begin{bmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a-b & b-a & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots\, 0\ a-b & b-a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a-b & b-a \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{(i-1)\text{-te Sp.} + i\text{-te Spalte}\\ i=n,\dots,2}}{=} \det_n\begin{bmatrix} b+(n-1)a & (n-1)a & \cdots & 2a & a \\ 0 & b-a & 0 & \cdots\, 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ & & & 0 & b-a \end{bmatrix}$$

$$= (b + (n-1) \cdot a)\,(b-a)^{n-1}$$

Für $b = x$ und $a = 1$ folgt also

$$\det_n(A) = (x + n-1)(x-1)^{n-1}$$

6) a) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y^T = (y_1, \dots, y_n)$

Dann gilt $x \cdot y^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & & x_n y_n \end{pmatrix}$

Falls $x = 0$ oder $y = 0$, so gilt offenbar $\mathrm{Rang}(x \cdot y^T) = 0$

Sei $x, y \neq 0$. Der Zeilenraum wird von y^T aufgespannt, jede Zeile ist ein Vielfaches von $(y_1, \dots, y_n) \Rightarrow \dim ZR(xy^T) =$

$= \mathrm{Rang}(xy^T) = 1$

b) Sei $A \in k^{n \times n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$ gegeben. Falls $A = 0$, so wähle $x = y = 0$. Sei also $a_{ij} \neq 0$.

Da $\mathrm{Rang}(A) = 1$, sind alle Spaltenvektoren Vielfache des Spaltenvektors $a_j \neq 0$. Insbesondere gilt

$A = [\lambda_1 a_j, \dots, \lambda_{j-1} a_j, a_j, \lambda_{j+1} a_j, \dots, \lambda_n a_j] = a_j \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^T$ für $\lambda_i \in k$.