Aufgabe 1

a) Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ ist eine Basis, wenn sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist

b) $\det_n A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$

c) Sei $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\dim V = \dim \operatorname{kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f)$

d) Sei $\sigma \in S_n$. Dann gilt

$$\operatorname{sgn} \sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Aufgabe 2: Sei $A(a) = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & a^3 & 1+a^2 \\ -a & 0 & a-a^2 \end{bmatrix}$

Betrachte folgende Umformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a^2 & a & 1 & 0 & 0 \\ a & a^3 & 1+a^2 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a-a^2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} - a \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + a \cdot \mathrm{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a^2 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & a^3 & a & a & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - a\cdot II \\ \\ III - a\cdot II \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Rang } A(a) = \begin{cases} 3, & \text{falls } a \neq 0 \\ 2, & \text{falls } a = 0 \end{cases} \quad . \quad \text{Sei } a \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a^2 & 0 & 1+a^2 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 & a+a^2 & -a & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III \cdot \frac{1}{a^3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a^2 & 0 & a^2+1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+a}{a^2} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ 0 & 0 & 1 & -a & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - a^2\cdot II \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a^2-a & -a+1 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+a}{a^2} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ 0 & 0 & 1 & -a & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A(a)^{-1} = \begin{bmatrix} a^2-a & -a+1 & -\frac{1}{a} \\ \frac{1+a}{a^2} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ -a & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3) a) Da Rang $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$, ist Ψ eine Basis.

b) $$M_\Psi(f) = \begin{bmatrix} 3 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \Psi_1 + (-1) \cdot \Psi_3$$

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 14 \cdot \Psi_1 - 3 \cdot \Psi_2 - 3\Psi_3$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $\text{Bild}(f) = \langle f(\Psi_1), f(\Psi_2), f(\Psi_3) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von Bild(f).

Aufgabe 4 a) und c) sind richtig, b) und d) falsch.

a) Beh: Hat $Ax=b$ für jedes $b\in k^m$ eine Lösung, so ist $m=\operatorname{Rang} A$.

Beweis: Für jedes $b\in k^m$ existieren $x_1,\dots x_n\in k$ mit $A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=b$, d.h. $b=\sum x_i Ae_i=\sum x_i A_{\cdot i}$. Somit erzeugen die Spalten von A ganz k^m und der Spaltenrang (= Rang) ist m

a') Beh: Hat $Ax=b$ für ein b genau eine Lösung (x), so ist $n=\operatorname{Rang} A$

Beweis: Für $\operatorname{Kern} f_A\neq 0$ $\exists\, 0\neq y$ mit $Ay=0$. Dann ist aber auch $A(x+y)=b$ und $x+y$ eine weitere Lösung. Somit ist $\operatorname{Kern} f_A=0$ und $n=\dim\operatorname{Kern} f_A+\dim\operatorname{Bild} f_A$ $=0+\dim\operatorname{Bild} f_A=\operatorname{Rang} A$.

b) Nimm $V=X=Y=Z\neq 0$. Dann ist $V=X+Y+Z=X\cap Y$ $=X\cap Z=Y\cap Z$ und $\dim V\neq 3\cdot\dim V-3\dim V=0$

c) Beh: f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f bildet jede l.u. Teilmenge von V auf eine l.u. Teilmenge ab.

Beweis: „$\Rightarrow$“ Sei $\{v_1,\dots v_r\}$ l.u. in V und es sei $0=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i f v_i$. Dann ist $0=f(\sum\lambda_i v_i)$, also wegen $\operatorname{Kern} f=0$ schon $0=\sum\lambda_i v_i$. Da $\{v_1,\dots v_r\}$ l.u. ist schon $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_r=0$

„$\Leftarrow$“ Sei $v\neq 0$, also $\{v\}$ l.u.. Dann ist $\{fv\}$ l.u., also $fv\neq 0$. Es folgt $\operatorname{Ker} f=0$, d.h. f ist injektiv.

c') Beh: f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f bildet jedes E.S. auf E.S. ab.

„$\Rightarrow$“: Sei $E=\{v_1,\dots v_n\}$ ein E.S. und sei $y\in W$. Dann $\exists\, x\in V$ mit $fx=y$, da f surjektiv. Da E E.S., gilt $x=\sum\lambda_i v_i$ und $fx=\sum\lambda_i f v_i=y$. Also ist $\{fv_1,\dots fv_n\}$ ein E.S.

„$\Leftarrow$“: Sei $E=\{v_1,\dots v_n\}$ E.S. von V. Dann ist $\{fv_1,\dots fv_n\}$ ein E.S. von W. Sei $y\in W$. Dann gilt $y=\sum\lambda_i f v_i$ für geeignete λ_i, d.h. $y=f(\sum\lambda_i v_i)$ liegt im Bild von f. Daher ist f surjektiv.

5) a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(z-1)$

b) Für $A=0$ gilt $A^2 = 3A$ und $\det_3 A = 0$.
Für $\det A \neq 0$ liefert Multiplikation mit A^{-1}
$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ und $\det_3 A = 27$. Beide Fälle treten ein.

6) a) Erinnerung: U U.R. $\Leftrightarrow$ $0 \in U$ und U abg. unter Addition und Skalarmultiplikation.
V' U.R. von V $\Rightarrow$ $0 \in V'$ $\Rightarrow$ $0 = f0 \in fV'$
$x, y \in fV'$ $\Rightarrow \exists\, x', y' \in V'$ mit $x = fx'$, $y = fy'$.
Da V' U.R. ist, gilt $x'+y' \in V'$. Es ist $x+y = fx' + fy' = f(x'+y')$
$\in fV'$.
Für beliebiges $\lambda \in k$ ist $\lambda x = \lambda f x' = f(\lambda x') \in fV'$, da $\lambda x' \in V'$.

b) „$\Rightarrow$" Sei F injektiv. Aus $F(\{0\}) = F(\operatorname{Ker} f) = \{0\}$ folgt dann $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, d.h. f ist injektiv.

„$\Leftarrow$": Sei $FV' = FV''$, d.h. $fV' = fV''$ für U.R. V', V'' und sei f injektiv. Zu zeigen ist, dass $V' = V''$.
Wir zeigen $V' \subseteq V''$. Sei $x \in V'$. Dann ist $fx \in fV' = fV''$,
d.h. $fx = fy$ für ein $y \in V''$. Da f injektiv ist, ist $x = y \in V''$.

Symmetrisch folgt $V'' \subseteq V'$.

4d) und 4d'): Setze $V = W = k$, $f = \mathrm{id}_k = -g$.
Dann ist $f+g = 0$ weder injektiv noch surjektiv,
aber f und g sind beide injektiv.