Übungen zur Linearen Algebra II — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 8 — Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 08.12.2011, 12 Uhr — Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Bestimme eine Jordanbasis und die entsprechende Jordansche Normalform der folgenden linearen Abbildungen:

a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto e_3 + e_4$, $e_i \mapsto 0$ für $i = 3, 4$

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $e_1 \mapsto e_2 + e_3$, $e_2 \mapsto e_4$, $e_3 \mapsto e_4$, $e_4 \mapsto 0$

c) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, $e_1 \mapsto e_2 + e_3$, $e_2 \mapsto e_5$, $e_3 \mapsto e_4$, $e_4 \mapsto e_2$, $e_5 \mapsto 0$

d) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, $e_1 \mapsto e_3 + e_4$, $e_2 \mapsto e_3 + e_4$, $e_3 \mapsto e_5$, $e_i \mapsto 0$ für $i = 4, 5$

Aufgabe 2

Bestimme eine Jordanbasis und die entsprechende Jordansche Normalform der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Sei $E \subseteq K$ die Menge der Eigenwerte von f. Es gebe eine Basis $\mathcal{A}$ von V, so dass $M_{\mathcal{A}}(f)$ Jordansche Normalform hat, also

$$M_{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

mit $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in E$. Für jedes $e \in E$ setze

$$I_e := \{i \in \{1, \ldots, r\} \mid \lambda_i = e\},\; n_e := \max\{m_i \mid i \in I_e\}.$$

Zeige:

a) $\mu_f = \Pi_{e \in E}(X - e)^{n_e}$.

b) Für jedes $e \in E$ ist $|I_e| = \dim E_f(e)$.

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim V = 5$. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, so dass $\chi_f = (X-2)^3(X+1)^2$, $\dim E_f(2) = 2$ und $\dim E_f(-1) = 1$. Bestimme die Menge

$\{A \in M(5{\times}5, \mathbb{R}) \mid A \text{ hat Jordansche Normalform und } \exists \text{ Basis } \mathcal{A} \text{ von } V \text{ mit } A = M_{\mathcal{A}}(f)\}$.

Hinweis: Beachte Aufgabe 3b).