Übungen zur Linearen Algebra II
Blatt 7
Abgabe bis 01.12.2011, 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $A^2 = A$ (eine solche Matrix heißt Projektor). Zeige:

a) Falls λ ein Eigenwert ist, so ist $\lambda \in \{0, 1\}$.

b) Es gilt $\mathrm{Kern}(A) \cap \mathrm{Bild}(A) = 0$.

c) Es gilt $\mathrm{Kern}(A) + \mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$.

d) Was ist die geometrische Bedeutung der linearen Abbildung l_A für $n = 2$?

e) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^n$, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(l_A) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei $r = \dim \mathrm{Bild}(A)$.

Aufgabe 2

Bestimme die Haupträume der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind

a) 0 ist der einzige Eigenwert von A.

b) $\chi_A = X^n$.

c) A ist nilpotent, d.h. es existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $A^r = 0$.

d) Es gilt $\mathrm{Spur}(A^k) := \sum_{i=1}^n (A^k)_{i,i} = 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$.

Tipp: Zeige, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ für beliebige $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, also insbesondere gilt $\mathrm{Spur}(S^{-1}AS) = \mathrm{Spur}(A)$ für invertierbare Matrizen $S \in M_{n,n}(\mathbb{C})$.

Aufgabe 4

Bestimme das Minimalpolynom und die Haupträume der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -25 & -34 & -18 \\ 14 & 19 & 10 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$