Aufgabe 1

Sei K ein Körper und $A \in M_{n,n}(K)$ diagonalisierbar mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

a) Beweise direkt, d.h. ohne Benutzung des Satzes aus der Vorlesung, dass $\chi_A(A) = 0$.

b) Beweise, dass $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper.

a) Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{k,k}(K),$$

also $(A_1)_{i,j} = 1$ für $j - i = 1$ und $(A_1)_{i,j} = 0$ für $j - i \neq 1$. Sei $0_{s,t} \in M_{s,t}(K)$ die Nullmatrix. Sei

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k,n-k} \end{pmatrix} \in M_{n,n}(K).$$

Zeige, dass $\chi_A(t) = t^n$ und $\mu_A(t) = t^k$.

b) Berechne das Minimalpolynom von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(K)$$

in Abhängigkeit von $a, b \in K$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper. Folgere aus dem Satz von Cayley-Hamilton, dass die Elemente $E_n, A^1, \ldots, A^n \in M_{n,n}(K)$ linear abhängig sind. Stelle einen Zusammenhang zwischen $\dim\langle E_n, A, \ldots, A^n\rangle$ und $\mathrm{grad}(\mu_A)$ her.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper. Sei $A \in M_{n,n}(K)$ mit $A^2 = A$. Zeige, dass A nur die Eigenwerte 0 und 1 besitzt und dass $\mu_A(t) \in \{t, t-1, t^2 - t\}$.