Übungen zur Linearen Algebra II — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 5 — Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 17.11.2011, 12 Uhr — Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$. Welche der Matrizen sind diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar über $\mathbb{R}$?

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a) Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n$ und U ein Unterraum mit $\dim U = k \leq n$. Zeige, dass es eine vollständige Fahne

$$0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_k \subsetneq \ldots \subsetneq U_n = V$$

gibt, so dass $U_k = U$.

b) Konstruiere solch ein Fahne für $V = \mathbb{R}^4$ und $U = \langle (1,1,0,0), (0,1,0,1) \rangle$.

Aufgabe 3

Seien $V = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B}$ die Standardbasis. Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ gegeben durch

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Deute f geometrisch und bestimme die Eigenwerte und Eigenräume.

Aufgabe 4

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalisierbar. Sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Untervektorraum von V, also $f(U) \subseteq U$. Zeige, dass der Endomorphismus $f|_U \colon U \to U$ diagonalisierbar ist.