Übungen zur Linearen Algebra II — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 4 — Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 10.11.2011, 12 Uhr — Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

a) Seien V ein K-Vektorraum und $W_1, \ldots, W_k$ für $k > 2$ Unterräume von V, so dass $V = W_1 + \ldots + W_k$. Zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass im Allgemeinen aus $W_1 \cap \ldots \cap W_k = \{0\}$ und $W_i \cap W_j = \{0\}$ für alle $i \neq j$ nicht folgt, dass $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.

b) Seien U, V, W drei K-Vektorräume und $g : U \to V$ bzw. $f : V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Zeige: ist $f \circ g$ ein Isomorphismus ist, so ist $V = \mathrm{Bild}(g) \oplus \mathrm{Kern}(f)$.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$, also insbesondere $1_K + 1_K \neq 0_K$. Eine Matrix $A \in M_{n,n}(K)$ heißt symmetrisch, falls $A = {}^tA$ und schiefsymmetrisch, falls $A = -{}^tA$. Bezeichne mit $\mathrm{Sym}(n, K)$ die Menge der symmetrischen und mit $\mathrm{Alt}(n, K)$ die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen.

a) Zeige, dass $\mathrm{Sym}(n, K)$ und $\mathrm{Alt}(n, K)$ Unterräume von $M_{n,n}(K)$ sind und berechne deren Dimension.

b) Für eine Matrix $A \in M_{n,n}(K)$ definiere $A_s = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ und $A_a = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. Zeige, dass A_s symmetrisch und A_a schiefsymmetrisch ist und dass $A = A_s + A_a$.

c) Zeige, dass $M_{n,n}(K) = \mathrm{Sym}(n, K) \oplus \mathrm{Alt}(n, K)$.

Aufgabe 3

Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

trigonalisierbar ist und bestimme eine Matrix $T \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, so dass TAT^{-1} eine obere Dreicksmatrix ist.

Aufgabe 4

Sei $n \geq 1$ eine natürlich Zahl und seien $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Beweise oder widerlege folgende Aussagen (im zweiten Fall reicht natürlich ein Gegenbeispiel):

a) Sind μ, $\lambda \in \mathbb{R}$ zwei Eigenwerte von f, so ist auch $\mu + \lambda$ ein Eigenwert von f.

b) Ist $v \in \mathbb{R}^n$ sowohl ein Eigenvektor von f als auch von g, so ist v ein Eigenvektor von $f + g$.

c) Ist f bijektiv und $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von f, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von f^{-1}.

d) Sind f und g diagonalisierbar, so ist auch $f \circ g$ diagonalisierbar.