Übungen zur Linearen Algebra II — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 3 — Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 03.11.2011, 12 Uhr — Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

a) Sind die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

b) Für a, $b \in \mathbb{R}$ sei

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von $M_{a,b}$. Für welche a, b ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und f, $g \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar, so dass $f \circ g = g \circ f$. Zeige, dass für jeden Eigenraum $E_f(\lambda)$ von f gilt, dass $g(E_f(\lambda)) \subseteq E_f(\lambda)$. Zeige, dass eine Basis von V existiert, die ausschließlich aus Vektoren besteht, die sowohl Eigenvektoren von f als auch von g sind.
Tipp: Im zweiten Teil kann man annehmen, dass $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in K$. Warum?

Aufgabe 3

Für ein Polynom $p = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ definiert man eine formale Ableitung durch

$$p' := a_1 + (2a_2)X + \ldots + (na_n)X^{n-1} \in \mathbb{C}[X].$$

Dann gelten für alle $p, q \in \mathbb{C}[X]$ und $a \in \mathbb{C}$, dass

$$(p+q)' = p' + q',\ (pq)' = p'q + pq' \text{ und } (ap)' = ap'.$$

Sei $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle eines Polynoms $\mathbb{C}[X] - \{0\}$. Zeige, dass $a \in \mathbb{C}$ genau dann eine mehrfache Nullstelle von p ist (d.h., dass die Vielfachheit größer als 1 ist), wenn a eine Nullstelle von p' ist.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{B}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^4$. Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ diagonalisierbar ist und bestimme eine Basis $\mathcal{A}$, so dass $M_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f)$ Diagonalgestalt hat.