Aufgabe 1

a) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_1, 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_4, 2x_1 - 4x_2 + x_3).$$

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von f. Bestimme zu jedem Eigenwert eine Basis des Eigenraums.

b) Sei $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (2x_1, 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_4, 2x_1 - 4x_2 + x_3).$$

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von f. Bestimme zu jedem Eigenwert eine Basis des Eigenraums.

Aufgabe 2

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}(V)$ mit $g^2 = \mathrm{id}$ und $f^2 = \lambda \cdot f$ für ein $\lambda \in K$. Bestimme die Eigenwerte von f und g.

Aufgabe 3

Sei $U_n \subset \mathbb{Q}[X]$ der Unterraum

$$U_n := \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid \mathrm{grad}(P) \leq n\}$$

mit der Standardbasis $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Für ein Polynom $p = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{Q}[X]$ definiert man eine formale Ableitung durch

$$p' := a_1 + (2a_2)X + \ldots + (na_n)X^{n-1} \in \mathbb{Q}[X].$$

Betrachte die Abbildung $f : U_n \to U_n$ mit $f(p) = p'$.

a) Zeige, dass f linear ist.

b) Zeige, dass $f^{n+1} = 0$.

c) Bestimme $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

d) Bestimme die Eigenwerte von f.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{B}$ die kanonische Basis von $\mathbb{Q}^5$. Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ gegeben durch

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von f. Bestimme zu jedem Eigenwert eine Basis des Eigenraums.