Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien $(\ ,\ )$ und $\langle\ ,\ \rangle$ zwei Skalarprodukte auf V. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, so dass $(v,w) = a\langle v,w\rangle$ für alle $v,w \in V$.
- Für alle $v,w \in V$ mit $\langle v,w\rangle = 0$ gilt $(v,w) = 0$.

Aufgabe 2

Seien $A, B \in M_{n,n}(K)$ mit $AB = BA$, so dass die geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte von A und B gleich eins ist. Zeige, dass A und B die gleichen Eigenräume haben.

Aufgabe 3

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter euklidischer Vektorraum. Ein $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt *Drehung*, wenn f eine Isometrie ist und $\det(f) = 1$ gilt. Sei $\dim V = 3$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ eine Drehung mit $f \neq \mathrm{id}_V$. Zeige:

a) Der Untervektorraum $U := \{v \in V \mid f(v) = v\}$ ist eindimensional (U heißt Drehachse von f).

b) Der Untervektorraum $U^\perp = \{v \in V \mid \langle v,u\rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$ von V ist zweidimensional und es gilt, dass $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ und dass $f|_{U^\perp}\colon U^\perp \to U^\perp$ eine Drehung ist.

Aufgabe 4

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(4,\mathbb{R}).$$

Berechne die Eigenräume von A und eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, so dass ${}^tSAS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 5

Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f: V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ die Eigenwerte von f. Zeige, dass $\mu_f = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_r)$ das Minimalpolynom von f ist.