**Übungen zur Linearen Algebra II**
Blatt 12
Abgabe bis 19.01.2012, 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

## Aufgabe 1

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und für $0 \neq w \in V$ sei $F_w \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch

$$v \mapsto v - 2\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w.$$

Zeige:

a) $\langle w\rangle^\perp = \{v \in V \mid F_w(v) = v\}$.

b) $V = \langle w\rangle \oplus \langle w\rangle^\perp$.

c) $F_w$ definiert eine Spiegelung, d.h. $F_w$ ist orthogonal und $\dim U = \dim V - 1$, wobei $U = \{v \in V \mid F_w(v) = v\}$.

d) Zu jeder Spiegelung $F$ gibt es einen Vektor $w \in V \backslash \{0\}$, so dass $F = F_w$.

## Aufgabe 2

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeige:

a) Zu jedem Untervektorraum $U \subseteq V$ mit $\dim U = \dim V - 1$ gibt es genau eine Spiegelung $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $U = \{v \in V \mid f(v) = v\}$ ($f$ heißt die Spiegelung an $U$).

b) Für jede Spiegelung $f \in \mathrm{End}(V)$ gilt $\det f = -1$.

c) Für je zwei Vektoren $u, v \in V$ sind folgende Aussagen äquivalent:
   - $||u|| = ||v||$.
   - Es gibt eine Spiegelung $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $f(u) = v$.

## Aufgabe 3

Betrachte die Matrix

$$A = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix} \in M(3, K)$$

für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

a) Seien $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ die kanonische Basis und $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definiert durch $M_\mathcal{B}(F) = A$. Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ aus Eigenvektoren von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$M_\mathcal{A}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$.

b) Seien $K = \mathbb{C}$, $\mathcal{B}$ die kanonische Basis und $F \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ definiert durch $M_\mathcal{B}(F) = A$. Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ aus Eigenvektoren von $\mathbb{C}^3$, so dass $M_\mathcal{A}(F)$ Diagonalgestalt hat.

**Aufgabe 4**

Sei $V := \mathbb{R}^m$ und sei $W := \{A \in M(n,\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}$. Sei $V$ versehen mit dem Standardskalarprodukt und sei $W$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}(AB).$$

Seien $A_1, \ldots, A_m \in W$ und $f : V \to W$ die lineare Abbildung

$$f(x_1, \ldots, x_m) = x_1A_1 + \ldots + x_mA_m.$$

Zeige, dass für die Abbildung $g : W \to V$,

$$B \mapsto (\mathrm{tr}(A_1B), \ldots, \mathrm{tr}(A_mB))$$

gilt, dass $\langle f(x), B\rangle = \langle x, g(B)\rangle$ für alle $x \in V$ und alle $B \in W$.