Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{R}^5$ versehen mit dem Standardskalarprodukt und sei $U := \langle (1,2,3,0,0), (0,1,1,1,1) \rangle$. Bestimme eine Orthonormalbasis von U und eine Orthonormalbasis von $U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$, dem orthogonalen Komplement von U.

Aufgabe 2

Seien $n \in \mathbb{N}$ und V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Seien U und W die Untervektorräume von V mit

$$U := \{A \in V \mid {}^tA = A\} \text{ bzw. } W := \{A \in V \mid {}^tA = -A\}.$$

Setze

$$b : V \times V \to \mathbb{R},\ (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB).$$

Zeige:

a) Es gilt, dass b eine symmetrische Bilinearform auf V ist.

b) Es gilt
   - $V = U \oplus W$.
   - $b|_U$ ist positiv definit.

Aufgabe 3

Sei V ein zwei-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Raum- und einer Zeitdimension, d.h. mit einer Basis $\mathcal{B} = (x, t)$ und einer symmetrischen Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, so dass

$$\langle x, x \rangle = 1,\ \langle x, t \rangle = 0,\ \langle t, t \rangle = -1.$$

Man nennt diesen Raum "zweidimensionalen Minkowski-Raum". Beschreibe die Menge aller Endomorphismen $f \in \mathrm{End}(V)$, so dass

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$$

für alle $v, w \in V$, explizit.

Aufgabe 4

Betrachte den unitären Vektorraum $(\mathbb{C}^4, \langle\ ,\ \rangle)$ wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt sei. Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^4$. Betrachte die lineare Abbildung $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$, die durch die Matrix

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Berechne die Eigenwerte von f sowie eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ des $\mathbb{C}^4$, so dass $M_{\mathcal{A}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Wir wünschen allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Kathrin Kerkmann | Markus Reineke | Thorsten Weist