Übungen zur Linearen Algebra II
Blatt 10
Abgabe bis 22.12.2011, 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Überprüfe, ob durch die folgenden Abbildungen ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definiert wird, und gebe die darstellende Matrix bzgl. der Basis $((1,1),(1,-1))$ an, falls das der Fall ist:

a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2.$

b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto 4x_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1.$

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{R}[X]_2$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2, d.h. aller Polynome der Form $cX^2 + bX + a$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Seien $d, e \in \mathbb{R}$ mit $d \leq e$. Zeige, dass durch

$$s : \mathbb{R}[X]_2 \times \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R}, \quad (P,Q) \mapsto \int_d^e (P(t)Q(t))dt$$

eine symmetrische Bilinearform definiert wird und berechne die darstellende Matrix zur Basis $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ für $d = 1$ und $e = 2$.

Aufgabe 3

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\langle v,v\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt bzw. $||v|| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$ die dazugehörige Norm. Zeige:

a) $\langle v+w, v-w\rangle = ||v||^2 - ||w||^2$

b) $||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$

c) $||v-w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 - 2\langle v,w\rangle$

d) $\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}(||v+w||^2 - ||v-w||^2)$

e) Für $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ mit $v_i \neq 0$ und $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt: $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4

Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Zeige:

a) Zu jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein $z \in \mathbb{R}^3$, so dass für alle $w \in \mathbb{R}^3$ gilt $f(w) = \langle z,w\rangle$.

b) Für gegebene $u, v \in \mathbb{R}^3$ gibt es genau ein $z \in \mathbb{R}^3$, so dass für alle $w \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \langle z,w\rangle.$$

Man definiert $u \times v := z$ und nennt $u \times v$ das Vektorprodukt von u und v.

c) Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ ist $u \times v$ orthogonal zu u und v, d.h. $\langle u, v \rangle = 0$

d) Für alle $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

e) Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle \cdot v - \langle u, v \rangle \cdot w.$$