Übungen zur Linearen Algebra II | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 1 | Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 20.10.2011, 12 Uhr | Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & \sqrt{8} \\ \sqrt{3} & 3 & \sqrt{27} \\ 2\sqrt{2}+3 & 2+3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Q})$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 5 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{6,6}(\mathbb{R}) \text{ für beliebiges } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

Sei $A_n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ die $n \times n$-Matrix mit Einträgen

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zeige, dass

a) $\det A_n = 2 \det A_{n-1} - \det A_{n-2}$.

b) $\det A_n = n + 1$.

Aufgabe 3

Seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeige, dass für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

gilt, dass

$$\det(A) = \prod_{i,j \in \{1,\ldots,n\}\colon i<j} (a_j - a_i).$$

Aufgabe 4

Sei $M_n(x_1, \ldots, x_n) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ die $n \times n$-Matrix mit Einträgen

$$M_n(x_1, \ldots, x_n)_{ij} = \begin{cases} x_k & i = j = k \\ -1 & i - j = 1 \\ 1 & i - j = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Zeige, dass

$$\frac{\det(M_2(x_1, x_2))}{\det(M_1(x_2))} = x_1 + \frac{1}{x_2}$$

bzw.

$$\frac{\det(M_n(x_1, \ldots, x_n))}{\det(M_{n-1}(x_2, \ldots, x_n))} = x_1 + \frac{\det(M_{n-2}(x_3, \ldots, x_n))}{\det(M_{n-1}(x_2, \ldots, x_n))}$$

für $n \geq 3$.

b) Gebe eine Formel für $\frac{\det(M_n(x_1,\ldots,x_n))}{\det(M_{n-1}(x_2,\ldots,x_n))}$ an, die nur von x_i, $i = 1, \ldots, n$, abhängig ist.