Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme über $\mathbb{Q}$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \\ 12 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ definiert durch

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1-a^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a und gegebenenfalls die inverse Matrix durch gleichzeitige elementare Zeilenoperationen auf $A(a)$ und $E_4 = 4 \times 4$-Einheitsmatrix.

b) Erhält man die Inverse auch durch gleichzeitige elementare Spaltenumformungen auf $A(a)$ und E_4? Kann man sogar nach Belieben Zeilen- und Spaltenumformungen verwenden?

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix vom Rang r. Zeigen Sie:

a) Stets ist $r \leq \min\{m, n\}$.

b) Genau dann ist $m > r$, falls ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit $L(A, b) = \emptyset$ existiert.

c) Genau dann ist $n > r$, wenn es ein $b \in \mathbb{R}^m$ mit $|L(A, b)| \geq 2$ gibt.

d) Genau dann ist $n = m = r$, wenn für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ das Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 4

Sei $B \in k^{n\times n}$. Der **Kommutant** $K(B)$ von B sei definiert als die Menge aller mit B vertauschenden $(n \times n)$-Matrizen, d.h.

$$K(B) := \{A \in k^{n\times n} \mid AB = BA\}.$$

Beweisen Sie:

a) $K(B)$ ist ein Unterring von $k^{n\times n}$, der auch unter Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, also auch ein k-Unterraum von $k^{n\times n}$.

b) Seien $\mathbf{i} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\mathbf{1} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie, dass $K(\mathbf{i})$ der reelle Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{1}\}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nicht-kommutativ ist.

d) Sei $A = a \cdot \mathbf{1} + b \cdot \mathbf{i} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \in K(\mathbf{i}) - \{0\}$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und, dass $A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a \cdot \mathbf{1} - b \cdot \mathbf{i})$ gilt. Folgern Sie daraus, dass $K(\mathbf{i})$ ein Körper ist.