Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Klaus Bongartz
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Seien V, W zwei k-Vektorräume und $f : V \to W$ eine k-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) Für jeden Untervektorraum W' von W ist $f^{-1}(W')$ ein Untervektorraum von V. Insbesondere ist $\mathrm{Kern}(f) = f^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von V.

b) Für jeden Untervektorraum V' von V ist fV' ein Untervektorraum von W. Insbesondere ist $\mathrm{Bild}(f)$ ein Untervektorraum von W.

c) Falls f bijektiv ist, so ist auch f^{-1} linear.

Aufgabe 2

Seien U, V, W drei k-Vektorräume und M eine beliebige Menge. Zeigen Sie:

a) Die Menge $V^M := \{f \mid f : M \to V \text{ Abbildung}\}$ wird vermöge $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ und $(\lambda f)(m) = \lambda f(m)$ zu einem k-Vektorraum.

b) $\mathrm{Hom}_k(U, V)$ ist ein Untervektorraum von V^U versehen mit der Vektorraumstruktur aus a).

c) Falls $f : U \to V$ und $g : V \to W$ linear sind, so auch $g \circ f : U \to W$.

d) Für f_1, $f_2 \in \mathrm{Hom}_k(U, V)$, g_1, $g_2 \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ und $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in k$ gilt

$$(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) \circ (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \mu_j (g_j \circ f_i).$$

Aufgabe 3

Gibt es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, 3$?

a) $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 0, 1)$, $b_1 = (5, 7, 3)$, $b_2 = (11, 25, 2)$, $b_3 = (19, 1, 12)$.

b) $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (2, 5, 3)$, $b_1 = (1, 2, 1)$, $b_2 = (-2, 3, 2)$, $b_3 = (-4, 13, 8)$.

c) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 3, -1)$, $a_3 = (4, 6, 2)$, $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 1, 1)$, $b_3 = (3, -1, 1)$.

Aufgabe 4

Seien V, W zwei endlich-dimensionale k-Vektorräume und $f : V \to W$ eine k-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) Genau dann ist f injektiv, wenn fL linear unabhängig ist für jede linear unabhängige Teilmenge L von V.

b) Genau dann ist f injektiv, wenn es eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ gibt.

c) Finde analoge Aussagen für die Surjektivität von f.