Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 7 | Prof. Dr. Klaus Bongartz
Abgabe bis 31.05.2013, 12 Uhr | Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Zeilenrang der folgenden reellen Matrizen durch Berechnung der reduzierten Zeilenstufenform:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ -6 & -4 & -10 & -14 \end{bmatrix}$,

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$,

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 & -2 & 1 \\ -2 & b & 5 & b & -2 \end{bmatrix}$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Sei V ein k-Vektorraum mit $\dim V = n$. Zeigen Sie:

a) Für eine n-elementige Teilmenge M von V sind folgende Aussagen äquivalent:
  - M ist linear unabhängig
  - M ist ein Erzeugendensystem

b) Es gibt eine Kette
$$0 = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n = V$$
von Unterräumen mit $\dim U_i = i$.

Aufgabe 3

Seien $U_1, U_2, \ldots, U_r$ Unterräume eines endlich-dimensionalen k-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\sum_{i=1}^r U_i = \bigoplus_{i=1}^r U_i$.

b) Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ gilt $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = 0$.

c) $\dim \sum_{i=1}^r U_i = \sum_{i=1}^r \dim U_i$.

Aufgabe 4

Sei $R \in k^{m \times n}$ eine reduzierte Zeilenstufenmatrix. Für $1 \leq t \leq n$ sei $U_t := \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid x_j = 0 \text{ für alle } j < t\}$.

a) Zeigen Sie, dass $U_t \cap Z(R) = \langle R_{i\bullet} \mid s(i) \geq t \rangle$.

b) Zeigen Sie, dass für reduzierte Zeilenstufenmatrizen $R, R' \in k^{m \times n}$ aus $Z(R) = Z(R')$ bereits $R = R'$ folgt.