Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 6
Abgabe bis 17.05.2013, 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Klaus Bongartz
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei V ein k-Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Teilmenge L von V ist linear unabhängig.

b) Jede Obermenge E' eines Erzeugendensystems E ist ein Erzeugendensystem.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis eines k-Vektorraums V. Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

a) $L_1 = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$

b) $L_2 = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_1\}$

c) $L_3 = \{v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_4, v_1 + v_3 + v_4, v_2 + v_3 + v_4\}$

Achtung: Die Antwort hängt davon ab, ob in dem Körper $1 + 1 = 0$ oder $1 + 1 + 1 = 0$ gilt oder nicht.

Aufgabe 3

Seien U_1, U_2, U_3 Unterräume eines k-Vektorraums V. Zeigen Sie:

a) Genau dann ist $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

b) Stets gilt $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$.

c) Geben Sie ein Beispiel an, in dem $U_1 \cap (U_2 + U_3) \nsubseteq (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$.

d) Falls $U_2 \subseteq U_1$, so gilt: $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) = U_2 + (U_1 \cap U_3)$.

Aufgabe 4

a) Seien M eine Menge und k ein Körper. Sei für $m \in M$ die Abbildung $e_m : M \to k$ definiert durch

$$m' \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } m' \neq m \\ 1, & \text{wenn } m' = m \end{cases}.$$

Zeigen Sie: In k^M ist $\{e_m \mid m \in M\}$ genau dann eine Basis, wenn M endlich ist.

b) Zeigen Sie: In $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ist $\{\sin, \cos, \exp\}$ linear unabhängig. Dabei sind $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ und $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$.