Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 5 | Prof. Dr. Klaus Bongartz
Abgabe bis 10.05.2013, 12 Uhr | Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Im Folgenden sei immer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$?

a) $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0\}$ für ein fest gewähltes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

b) $V := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt ein } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ mit } x_i = 0\}$

c) $W := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$

d) $X := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i = x_n\right\}$

e) $Y := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2^2\right\}$

f) $Z := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\right\}$

Aufgabe 2

In $\mathbb{R}^4$ sei U_1 das Erzeugnis der Vektoren $(1, 1, 0, 0)$ und $(1, 2, 3, 0)$. Ferner sei

$$U_2 = \{(x_1, \ldots, x_4) \mid x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass U_2 ein Unterraum ist und geben Sie ein Erzeugendensystem an.

b) Berechnen Sie $U_1 \cap U_2$.

c) Geben Sie ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ an.

Aufgabe 3

Seien G eine Gruppe und $\phi : G \to G$ gegeben durch $\phi(x) = x^{-1}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Genau dann ist G kommutativ, wenn ϕ ein Homomorphismus ist.

b) Ist $x^2 = 1$ für alle $x \in G$, so ist G kommutativ.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ die Elemente $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ linear unabhängig sind.