Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 4 | Prof. Dr. Klaus Bongartz
Abgabe bis 03.05.2013, 12 Uhr | Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Für $a,\ b \in \mathbb{R}$ sei $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_{a,b}(x) = ax + b$. Zeigen Sie, dass $G = \{f_{a,b} \mid a \neq 0,\ b \text{ beliebig}\}$ eine Untergruppe von $S(\mathbb{R})$ ist. Ist G kommutativ?

Aufgabe 2

Sei $\sqrt{2}$ die positive reelle Zahl x mit $x^2 = 2$. Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

b) $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ gilt genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$.

c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Sei $M \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Sei $R := \{f \mid f : M \to \mathbb{F}_2\}$. Sei die Addition und Multiplikation auf R 'punktweise' definiert durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \text{ für jedes } x \in M.$$

Seien weiter $0,\ 1 \in R$ definiert durch $0(x) := 0$ bzw $1(x) := 1$ für alle $x \in M$ und für $f \in R$ sei $-f$ definiert durch $(-f)(x) = -f(x)$ für alle $x \in M$.

a) Zeigen Sie, dass R durch obige Definitionen zu einem kommutativen Ring wird.

b) Gibt es in R Elemente $f, g \neq 0$ mit $f \cdot g = 0$?

c) Zeigen Sie, dass R genau dann ein Körper ist, wenn $|M| = 1$ gilt.

Aufgabe 4

Sei M eine beliebige Menge und $2^M := \{f : M \to \{0, 1\}\}$ die Menge der Abbildungen von M in die 2-elementige Menge $\{0, 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : 2^M \to P(M)$ mit $\Phi(f) = f^{-1}(0)$ bijektiv ist.

b) Sei M endlich mit n Elementen. Zeigen Sie, dass $P(M)$ genau 2^n Elemente hat.

c) Wieder sei M endlich mit n Elementen. Sei

$$N = \{(B, C) | B, C \subseteq M, B \cap C = \emptyset\}.$$

Zeigen Sie, dass N genau 3^n Elemente hat.