Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 3
Abgabe bis 26.04.2013, 12 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Klaus Bongartz
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Beweisen Sie für die rekursiv definierten Folgen $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ jeweils die angegebene explizite Darstellung:

a) Definiere $a_0 = 2$ und $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$ für $n \geq 1$. Dann ist $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Es seien $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 2$. Dann ist $a_n = \frac{2}{3}(1 - (-1)^n \frac{1}{2^n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

a) $2^n \leq n!$ für alle $n \geq 4$.

b) $n! \leq n^{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \geq 1$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 3

Die Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$ und $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie:

a) Es ist $a_n = 2^{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

b) Für $n \geq 1$ ist a_n die Anzahl der endlichen Folgen (variabler Länge) strikt positiver natürlicher Zahlen mit Summe n. (Etwa für $n = 3$ ist $a_3 = 4$ und die gesuchten Folgen sind (3), $(2,1)$, $(1,2)$ und $(1,1,1)$.)

Aufgabe 4

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ sei $\binom{x}{0} := 1$ und für alle $n < 0$ sei $\binom{x}{n} := 0$. Weiter sei rekursiv

$$\binom{x}{n+1} = \binom{x}{n} \frac{x-n}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\displaystyle\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n+k}{k} = 4^n$.

Die Abgabe erfolgt in folgende Briefkästen auf Ebene D.13 (diese stehen erst ab Mitte nächster Woche zur Verfügung):
Gruppe 1 (Di. 14 -16 Uhr): 68
Gruppe 2 (Mi. 16 -18 Uhr): 69
Gruppe 3 (Mi. 12 -14 Uhr): 67
Gruppe 4 (Di. 16 -18 Uhr): 70