| | |
|---|---|
| **Übungen zur Linearen Algebra I** | Bergische Universität Wuppertal |
| Blatt 2 | Prof. Dr. Klaus Bongartz |
| keine Abgabe | Dr. Thorsten Weist |

### Aufgabe 1

Seien $A$ und $B$ Mengen. Zeigen Sie: Genau dann gilt $A = B$, wenn $A \cap B = A \cup B$.

### Aufgabe 2

Für beliebiges $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei $f_{(a,b)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_{(a,b)}(x) := ax + b$.

a) Für welche $(a, b)$ ist $f_{(a,b)}$ injektiv bzw. surjektiv?

b) Berechne beide möglichen Kompositionen von $f_{(a,b)}$ und $f_{(c,d)}$. Wann stimmen sie überein?

### Aufgabe 3

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen $X$ und $Y$. Außerdem seien $M \subseteq X$ sowie $N \subseteq Y$ Teilmengen. Zeigen Sie:

a) Stets gilt $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$. Gleichheit gilt genau dann für alle $M \subseteq X$, wenn $f$ injektiv ist.

b) Untersuchen Sie analog den Zusammenhang zwischen $f(f^{-1}(N))$ und $N$.

### Aufgabe 4

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $f_* : P(A) \to P(B)$, $f^* : P(B) \to P(A)$ seien die Abbildungen gegeben durch $f_*(A') = f(A')$ für $A' \subseteq A$ bzw. $f^*(B') = f^{-1}(B')$ für $B' \subseteq B$. Zeigen Sie:

a) Für jede Menge $M$ ist $(\mathrm{id}_M)_* = \mathrm{id}_{P(M)} = (\mathrm{id}_M)^*$.

b) Für je zwei Abbildungen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ und $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

c) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   - i) $f$ ist injektiv,
   - ii) $f_*$ ist injektiv,
   - iii) $f^*$ ist surjektiv.

d) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   - i) $f$ ist surjektiv,
   - ii) $f_*$ ist surjektiv,
   - iii) $f^*$ ist injektiv.