Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Klaus Bongartz
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}.$$

durch elementare Zeilenumformungen.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in R$ die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & x^2 & & \dots & 1 \end{pmatrix} \in R^{n\times n}$$

genau $(1-x^n)^{n-1}$ ist. Tipp: Ziehen Sie das x-fache der zweiten Zeile von der ersten ab, dann das x-fache der dritten von der zweiten, und so weiter.

Aufgabe 2

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Sei n ungerade und A schiefsymmetrisch, das bedeutet $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass dann $\det A = 0$ ist.

b) Sei A eine orthogonale Matrix, das heißt $A^T A = E_n$. Zeigen Sie, dass $\det A \in \{1, -1\}$ ist.

Aufgabe 3

a) Seien $A \in R^{r\times r}$, $B \in R^{r\times s}$ und $D \in R^{s\times s}$. Zeigen Sie, dass für die Block-Trigonalmatrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in R^{(r+s)\times(r+s)}$$

gilt $\det_{r+s} M = (\det_r A)\cdot(\det_s D)$. Tipp: Überlegen Sie, dass $M = \left(\begin{smallmatrix} E_r & 0 \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & E_s \end{smallmatrix}\right)$ ist und verwenden Sie dann Zeilenentwicklung und den Determinanten-Multiplikationssatz.

b) Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Die Permutationsmatrix $P(\pi) \in R^{n\times n}$ ist definiert durch

$$P(\pi)_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq \pi(j) \text{ ist und} \\ 1, & \text{falls } i = \pi(j) \text{ gilt.} \end{cases}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie, dass $\det_n P(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi)$ ist.

c) Zeigen Sie, dass sich die Determinante einer Matrix nicht unter Spiegeln an der zweiten Diagonalen ändert. Konkret: Für eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ sei $\tilde{A} \in R^{n\times n}$ definiert durch $\tilde{A}_{ij} := A_{n+1-j,n+1-i}$, also

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{n,n} & A_{n-1,n} & \dots & A_{1n} \\ A_{n,n-1} & A_{n-1,n-1} & \dots & A_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n-1,1} & \dots & A_{11} \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $\det \tilde{A} = \det A$ ist. Tipp: Finden Sie eine geeignete Permutation $\pi \in S_n$, so dass $\tilde{A} = P(\pi)AP(\pi)$ ist.

Aufgabe 4

a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n > 0$ eine natürliche Zahl. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b \\ b & & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n\times n}.$$

b) Zeigen Sie, dass die ganzzahlige Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & & & & 2 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & n & & & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

die Determinante $(-1)^{n(n-1)/2} \cdot \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$ hat.