

### Aufgabe 1

Für  $A \in k^{m \times n}$  sei die transponierte Matrix  $A^T = B \in k^{n \times m}$  definiert durch  $b_{ij} = a_{ji}$  für  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ . Zeigen Sie:

- Seien  $A \in k^{m \times n}$  und  $B \in k^{p \times q}$ . Dann ist das Produkt  $BA$  genau dann definiert, wenn  $A^T B^T$  definiert ist. In diesem Fall ist  $(BA)^T = A^T B^T$ .
- Stets ist  $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T)$ . Falls  $A^{-1}$  existiert, so gilt  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

### Aufgabe 2

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt symmetrisch, falls  $A^T = A$ , und schiefsymmetrisch, falls  $A^T = -A$ . Zeigen Sie:

- Die Menge  $S$  der symmetrischen Matrizen ist ein Unterraum von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$ . Geben Sie eine Basis an.
- Die Menge  $A$  der schiefsymmetrischen Matrizen ist ein Unterraum von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\dim A = \frac{n(n-1)}{2}$ . Geben Sie eine Basis an.
- Es gilt  $\mathbb{R}^{n \times n} = S \oplus A$ .

### Aufgabe 3

- Schreiben Sie die folgenden Permutationen als Produkt von Transpositionen und berechnen Sie die Signen:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass jede Permutation aus  $S_n$  schon Produkt von Nachbartranspositionen  $\tau_i = (i \ i+1)$  mit  $1 \leq i \leq n-1$  ist.

### Aufgabe 4

Seien  $V$  ein Vektorraum der Dimension  $n < \infty$  und  $f \in \text{End}_k V$ . Setze  $f^0 = \text{id}_V$  und  $f^i = f \circ f^{i-1}$ . Zeigen Sie:

- Für alle  $i$  gilt  $\text{Bild}(f^{i+1}) \subseteq \text{Bild}(f^i)$ . Also gibt es ein kleinstes  $b \in \mathbb{N}$  mit  $\text{Bild}(f^{b+1}) = \text{Bild}(f^b)$  und es ist dann  $\text{Bild}(f^{b+m}) = \text{Bild}(f^b)$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .
- Für alle  $i$  gilt  $\text{Kern}(f^i) \subseteq \text{Kern}(f^{i+1})$ . Also gibt es ein kleinstes  $c \in \mathbb{N}$  mit  $\text{Kern}(f^{c+1}) = \text{Kern}(f^c)$  und es ist dann  $\text{Kern}(f^{c+m}) = \text{Kern}(f^c)$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .
- Es ist  $b = c$ .
- Es gilt  $V = \text{Kern}f^c \oplus \text{Bild}f^c$ .

**Hinweis:** Falls Sie an der Klausur teilnehmen möchten, melden Sie sich bitte bis Freitag, den 05.07.2013, bei "Wusel" an.