Übungen zur Linearen Algebra I — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 10 — Prof. Dr. Klaus Bongartz
Abgabe bis 21.06.2013, 12 Uhr — Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit

$$f(x,y) = (3x+3y, 2x-y, -5x+3y).$$

a) Bestimmen Sie $M_{\phi,\psi}(f)$, wobei $\phi = (e_1, e_2)$ und $\psi = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ seien.

b) Zeigen Sie, dass die Tupel

$$\phi' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \psi' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

geordnete Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind und berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\phi',\psi'}(f)$.

Aufgabe 2

Seien $r, s \geq 1$ natürliche Zahlen. Seien weiter $A_1, B_1 \in k^{r \times r}$, $A_2, B_2 \in k^{r \times s}$, $A_3, B_3 \in k^{s \times r}$ und $A_4, B_4 \in k^{s \times s}$. Gegeben seien die "Blockmatrizen"

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \in k^{(r+s)\times(r+s)}.$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}$$

(das heisst mit den Blöcken rechnet man genauso wie mit 2×2-Matrizen).

b) $A = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{smallmatrix}\right)$ ist genau dann invertierbar, wenn A_1 und A_4 invertierbar sind.

c) Geben Sie in (ii) eine Formel für A^{-1} an, wenn A invertierbar ist.

Aufgabe 3

Sei $f \in \mathrm{End}_k V$, sei $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r, \phi_{r+1}, \ldots, \phi_n)$ eine geordnete Basis von V. Sei

$$A = M_\phi(f) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

in Blöcke zerlegt wie in Aufgabe 2. Sei $U = \langle \phi_1, \ldots, \phi_r \rangle$ und $W = \langle \phi_{r+1}, \ldots, \phi_n \rangle$. Zeigen Sie:

a) $fU \subseteq U \iff A_3 = 0$.

b) $fW \subseteq W \iff A_2 = 0$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2y + z, x + 2z).$$

Die Linearität von f muss nicht geprüft werden. Sei ϕ die geordnete Basis bestehend aus den Einheitsvektoren $\phi = (e_1, e_2, e_3)$ und sei $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ mit

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $M_\phi(f)$.

b) Zeigen Sie, dass ψ auch eine geordnete Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix von ϕ nach ψ und die von ψ nach ϕ.

d) Bestimmen Sie $M_\psi(f)$
   - a) direkt mit der Definition von $M_\psi(f)$ und
   - b) mit Hilfe der Transformationsformel bei Koordinatenwechsel.