Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 1
keine Abgabe

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Klaus Bongartz
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Seien A, B, C und D Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

c) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv. Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel an, wo weder f noch g bijektiv sind.

d) Sind $g \circ f$ und f bijektiv, so ist g bijektiv.

e) Sind $g \circ f$ und g bijektiv, so ist f bijektiv.

f) Sind $g \circ f$ und $h \circ g$ bijektiv, so sind f, g und h bijektiv.

Aufgabe 2

Seien M, N endliche Mengen mit gleich vielen Elementen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- f ist injektiv
- f ist surjektiv
- f ist bijektiv

Aufgabe 3

Überprüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind:

a) $f(x, y) = (x + y^2, y + 2)$

b) $f(x, y) = (xy, x + y)$

c) $f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2)$

d) $f(x, y) = \left(x/\sqrt{1 + x^2 + y^2}, y/\sqrt{1 + x^2 + y^2}\right)$

Falls f bijektiv ist, so geben Sie eine Umkehrabbildung an.

Aufgabe 4

Seien M eine Menge, $P(M)$ ihre Potenzmenge und $f : M \to P(M)$ eine Abbildung. Sei

$$X := \{m \mid m \in M,\ m \notin f(m)\}.$$

Zeigen Sie, dass X nicht im Bild von f liegt.

Tipp: Sonst wäre $X = f(m_0)$ für ein $m_0 \in M$. Folgern Sie den Widerspruch: $m_0 \in X$ genau dann, wenn $m_0 \notin X$.

Bemerkung: Diese Aufgabe geht auf Cantor (1845-1918) zurück. Insbesondere wird dadurch gezeigt, dass es keine Bijektion zwischen einer Menge und ihrer Potenzmenge gibt.