Lineare Algebra I	Bergische Universität Wuppertal
2. Test	Prof. Dr. Klaus Bongartz
Sommersemester 2013	Dr. Thorsten Weist

Seien V, W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Frage	wahr	falsch
Falls f surjektiv ist, so ist f bereits ein Isomorphismus.		x
$\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Untervektorraum von V.	x	
$\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Untervektorraum von V.		x
Ist $V = W$ so ist f ein Isomorphismus, falls f injektiv ist.	x	
Ist f injektiv, so gilt $\dim \mathrm{Bild}(f) \geq \dim \mathrm{Kern}(f)$.	x	
Es gilt $\dim V = \dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Kern}(f)$.	x	
Es gilt $\dim W = \dim V + \dim \mathrm{Kern}(f)$.		x
$\mathrm{Bild}(f)$ beinhaltet ein Erzeugendensystem von W.		x

1. Falsch, falls $\dim V > \dim W$. Zum Beispiel $V = k^2$, $W = k$. Dann ist f definiert durch $f(e_1) = 1$, $f(e_2) = 0$ surjektiv, aber nicht bijektiv.

2. Vgl. Aufgabe 1, Blatt 8.

3. Das ist ein Unterraum von W, aber nicht von V, vgl. Aufgabe 1, Blatt 8.

4. Nach der Dimensionsformel bzw. nach Voraussetzung ist $\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Kern}(f) = \dim W$. Also ist f surjektiv und somit bijektiv, also ein Isomorphismus. Alternativ kann man die Surjektivität direkt nachrechnen oder die Umkehrabbildung angeben.

5. Dann gilt ja $\dim \mathrm{Kern}(f) = 0$.

6. Das ist die Dimensionsformel.

7. Gegenbeispiele sind zum Beispiel alle linearen Abbildungen, die surjektiv, aber nicht injektiv sind.

8. Das gilt nur, wenn f surjektiv ist (sonst ist $\mathrm{Bild}(f)$ ja ein echter Unterraum von W, kann W also nicht erzeugen).

Sei $A \in M_{n,n}(K)$ eine Matrix über K und φ ein Koordinatensystem von K^n.

Frage	wahr	falsch
Der Zeilenrang von A ist gleich dem Spaltenrang von A.	x	
Es gilt $M_\varphi(\mathrm{id}) = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix ist.	x	
Für $f, g \in \mathrm{End}(K^n)$ gilt $M_\varphi(f) \cdot M_\varphi(g) = M_\varphi(f \circ g)$.	x	
Der Zeilenraum von A ist invariant unter Zeilenumformungen.	x	
Der Lösungsraum des Linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ist ein Unterraum von K^n.	x	
Der Lösungsraum des Linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist ein Unterraum von K^n für alle $b \in K^n$.		x
Falls A eine obere Dreicksmatrix ist, so dass alle Diagonalelemente gleich Null sind, so ist A nilpotent.	x	
Ist U ein Unterraum von W, so ist $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V.	x	
Ist U ein Unterraum von V, so ist $f(U)$ ein Unterraum von W.	x	

1. Das ist ein Satz aus der Vorlesung.
2. Siehe Definition von Darstellungsmatrizen.
3. Das ist ein Satz aus der Vorlesung.
4. Das ist ein Satz aus der Vorlesung.
5. Der Unterraum ist genau der Kern der von A definierten linearen Abbildung. Das kann man aber auch direkt nachrechnen.
6. 0 ist offenbar nicht in dem Lösungsraum enthalten.
7. Man kann zum Beispiel per Induktion zeigen, dass in A^s die Einträge auf der s-ten Nebendiagonalen verschwinden.
8. Vgl. Aufgabe 1, Blatt 8.
9. Vgl. Aufgabe 1, Blatt 8.

Seien K ein Körper und V bzw. W endlich erzeugte K-Vektorräume mit geordneten Basen $\varphi = (b_1, \ldots, b_n)$ bzw. $\psi = (c_1, \ldots, c_m)$.

Frage	wahr	falsch
Falls es eine surjektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, so ist $m \leq n$.	x	
Ist U ein Untervektorraum von V mit $\dim U = k$, so gibt es eine Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, so dass $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$ eine Basis von U ist.		x
Falls $n \leq m$, so gibt es eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$, so dass $f(b_i) = c_i$ für $i = 1, \ldots, n$.	x	
Falls $m = n$, so gibt es eine Abbildung $f : V \to W$ mit $M_{\varphi,\psi}(f) = E_n$.	x	
Für die Länge l eines jeden linear abhängigen Tupels in V gilt $l \geq n$.		x

1. Offenbar bzw. nach der Dimensionsformel gilt $\dim \mathrm{Bild}(f) \leq \dim V$. Für sujektive lineare Abbildungen gilt $\dim W = \dim \mathrm{Bild}(f)$.

2. Betrachte als Gegenbeispiel $V = K^2$ mit Basis (e_1, e_2) und $U = \langle e_1 + e_2 \rangle$.

3. Lineare Abbildungen können durch die Bilder der Basiselemente definiert werden. Da ψ eine Basis ist, folgt die Injektivität (man nutze die Lineare Unabhängigkeit aus).

4. Die in 3 definierte Abbildung hat diese Eigenschaft.

5. Betrachte in k^4 zum Beispiel das Tupel $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$.