Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Frage	wahr	falsch
Ist f surjektiv, so gibt es ein $y \in Y$, so dass $f(x) = y$ für alle $x \in X$.		X
Ist $X = Y$, so ist jede injektive Abbildung bijektiv.		X
Sind X und Y endlich, so ist jede surjektive Abbildung injektiv.		X
Ist f injektiv, so gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$ für alle $x_1 \neq x_2$.	X	
Ist f surjektiv, so gibt es für alle $y \in Y$ ein $x \in X$, so dass $f(x) = y$.	X	
Ist $\|X\| = \|Y\| < \infty$, so ist jede injektive Abbildung bijektiv.	X	
f ist genau dann bijektiv, wenn $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ für alle $y \in Y$.		X

1. Eine Abbildung ist surjektiv, falls für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$. Insbesondere gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$, falls Y mehr als zwei Elemente enthält.

2. Sei $X = \mathbb{Z}$ und $f(x) = 2x$. Dann ist f injektiv, aber nicht surjektiv.

3. Betrachte $X = \{x_1, x_2\}$ und $Y = \{y\}$ mit $f(x_i) = y$.

4. Eine Abbildung ist injektiv, falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$. Insbesondere gilt also $f(x_1) \neq f(x_2)$ für $x_1 \neq x_2$.

5. Das ist genau die Definition von Surjektivität, siehe 1.

6. Falls f nicht surjektiv wäre, so gäbe es ein y, so dass $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\} = \emptyset$. Man kann sich nun überlegen, dass es dann zwangsläufig ein $y' \in Y$ gäbe mit $|f^{-1}(y')| \geq 2$; Widerspruch zur Injektivität.

7. Es ist nicht ausgeschlossen, dass eine Faser zweielementig ist. In diesem Fall wäre f aber nicht injektiv.

Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \cdot)$ zwei Gruppen.

Frage	wahr	falsch
Gilt $\|G\| = \|H\| < \infty$, so sind G und H isomorph.		X
Ist G nicht abelsch, so gilt $x \cdot y \neq y \cdot x$ für alle $y \neq x$.		X
Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so gilt $x^{-1} \in H$ und $x \cdot y$ für alle $x, y \in H$.	X	
Es gibt ein Element $g \in G$, so dass $g \cdot x = x$ für alle $x \in X$.	X	

1. Zum Beispiel ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2. Eine Gruppe heißt abelsch, falls $xy = yx$ für alle $x, y \in G$. Damit eine Gruppe nicht abelsch ist, reicht es also aus, dass $xy \neq yx$ für ein Paar $x, y \in G$. Betrachte zum Beispiel die Gruppe S_3.

3. Das ist genau Teil der Definition einer Untergruppe.

4. Jede Gruppe besitzt per Definition ein neutrales Element, das eben diese Eigenschaft erfüllt.

Sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum.

Frage	wahr	falsch
Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jedes v_i als Linearkombination der Vektoren v_j mit $j \neq i$ schreiben.		X
Jede Basis ist ein Erzeugendensystem.	X	
Zwei endliche Erzeugendensysteme haben die gleiche Länge.		X
Eine Teilmenge $\{v, w\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn $v = \lambda w$ für ein $\lambda \in K$.	X	
Die Vereinigung zweier Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^2$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.		X
Jede linear abhängige Menge des K^n hat mindestens $n+1$ Elemente.		X
Der Schnitt zweier Unterräume $U, W \subset V$ ist immer ein Untervektorraum.	X	
Für die Länge n eines Erzeugendensystem eines Unterraums U gilt $n \leq \dim V$.		X
Sind $U, W \subset V$ zwei Unterräume, so ist $U + W$ ein Unterraum.	X	
Sind $U, W \subset V$ zwei Unterräume, so ist $U \cup W$ ein Unterraum.		X
Alle linear unabhängigen Teilmengen der gleichen Länge erzeugen den gleichen Unterraum.		X

1. Betrachte zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ und $\{(1,0), (2,0), (0,1)\}$.

2. Jede Basis ist sogar ein Erzeugendensystem minimaler Länge.

3. Betrachte zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ und die Erzeugendensysteme $\{(1,0), (2,0), (0,1)\}$ und $\{(1,0), (0,1)\}$. Allgemein kann man Erzeugendensysteme mit beliebigen Vektoren erweitern und hat immer noch ein Erzeugendensystem.

4. Falls $\{v, w\}$ linear abhängig ist, so gibt es eine nicht-triviale (d.h. $\lambda_i \neq 0$ für $i \in \{1, 2\}$) Linearkombination $\lambda_1 v + \lambda_2 w = 0$.

5. Falls $U_1 = \langle (1,0) \rangle$ und $U_2 = \langle (0,1) \rangle$, so ist $U := U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum, zum Beispiel ist $(1,1) \notin U$

6. Zum Beispiel ist $\{(1,0), (2,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ linear abhängig.

7. Das ist eine Aussage aus der Vorlesung.

8. Falls K unendlich viele Elemente enthält, so kann ein Erzeugendensystem eines Vektorraums beliebige Länge haben.
9. Das ist eine Aussage aus der Vorlesung.
10. Das gilt im Allgemeinen nicht, siehe Aufgabe 3a) von Blatt 7.
11. Betrachte zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ und $U_1 = \langle (1,0) \rangle$ bzw. $U_2 = \langle (0,1) \rangle$. Dann gilt offenbar $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.