Prof. K. Bongartz/
D. Skorodumov
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Linearen Algebra I WS 08/09

Beispiel 4:
Der Endomorphismus f von $\mathbb{Q}^3$ habe bezüglich der Standardbasis $\phi = (e_1, e_2, e_3)$ die Darstellungsmatrix

$$M_\phi(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zeige, daß die Vektoren $\phi'_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $\phi'_2 = 2e_2 - e_3$, $\phi'_3 = e_1 + e_2$ eine Basis bilden und bestimme $M_{\phi'}(f)$.

Lösung: Betrachte die Matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Mit unserem Standardverfahren berechnen wir den Rang und gegebenenfalls B^{-1}.

1	0	1	1	0	0	
-1	2	1	0	1	0	
-1	-1	0	0	0	1	addiere I zu II und III
1	0	1	1	0	0	
0	2	2	1	1	0	
0	-1	1	1	0	1	dividiere II durch 2, addiere II zu III
1	0	1	1	0	0	
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
0	0	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	dividiere III durch 2, ziehe III von I und II ab
1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	
0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	
0	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	fertig

Also ist B invertierbar, das heißt $\phi' = (\phi'_1, \phi'_2, \phi'_3)$ ist ein Koordinatensystem. Ferner ist B die Transformationsmatrix von ϕ' nach ϕ, also B^{-1} die von ϕ nach ϕ'. Somit gilt

$$\begin{aligned} M_{\phi'}(f) &= B^{-1} M_\phi(f) B \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$