Satz 1 *(Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme) Seien* $A \in k^{m\times n}, b \in k^m$ *und* $L(A,b) = \{x \mid x \in k^n, Ax = b\}$ *die Lösungsmenge des LGS. Dann gilt:*

1. *Es gibt ein endliches Produkt* Z *von Elementarmatrizen aus* $k^{m\times m}$*, sodass* $\tilde{A} = ZA$ *eine Zeilenstufenmatrix mit* $r = Rang(A)$ *Stufen und Stufenfunktion* s *ist. Für* $\tilde{b} = Zb$ *gilt dann* $L(A,b) = L(\tilde{A},\tilde{b})$.

2. *Das LGS hat eine Lösung* $:\Longleftrightarrow L(A,b)$ *ist nicht leer* $\Longleftrightarrow Rang(A) = Rang(A,b) \Longleftrightarrow \tilde{b}_i = 0$ *für alle* $i \geq r+1$.

3. *Falls eine Lösung existiert, so erhält man alle Lösungen, indem man für die sogenannten freien Variablen* x_j *mit* $j \notin \{s(1), s(2), \ldots, s(r)\}$ *beliebige Werte einsetzt und danach rekursiv von unten nach oben die eindeutig bestimmten Werte für die Stufenvariablen* $x_{s(r)}, x_{s(r-1)}, \ldots x_{s(1)}$ *aus den Stufengleichungen bestimmt.*

4. *Die sog. homogene Gleichung* $Ax = 0$ *ist stets lösbar mit* $Kernf_A$ *als Lösungsmenge. Ist* x_0 *eine Lösung der sog. inhomogenen Gleichung* $Ax = b \neq 0$*, so gilt* $L(A,b) = x_0 + Kernf_A = \{x_0 + x \mid Ax = 0\}$.

Beweis: Die Existenz von Z mit den gewünschten Eigenschaften liefert der Gauß-Algorithmus. Da Z invertierbar ist, ist $Ax = b$ äquivalent zu $ZAx = Zb$. Damit ist der erste Teil bewiesen.

Ist $x \in L(A,b$, so gilt $b = Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{\bullet j} \in S(A)$, d.h. A und (A,b) haben den gleichen Spaltenraum und damit gleichen Rang. Umgekehrt folgt aus der Gleichheit der Ränge wegen $S(A) \subseteq S((A,b))$ die Gleichheit der Spaltenräume. Somit ist $b = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{\bullet j}$ Linearkombination der Spalten von A und x eine Lösung. Die letzte Bedingung ist offenbar notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit der Gleichung $\tilde{A}x = \tilde{b}$.

Der dritte Teil ergibt sich leicht aus der Gestalt von Zeilenstufenmatrizen.

Ist y Lösung von $Ay = b$, so folgt $0 = Ay - Ax_0 = A(y - x_0)$, d.h. $y = x_0 + (y - x_0)$ mit $y - x_0$ in $Kernf_A$. Umgekehrt ist für $x \in Kernf_A$ natürlich $A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b$.