Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

4. Juni 2012

Lineare Algebra I

Beispiel 3

Erinnere: Sei $f : V \to W$ eine k-lineare Abbildung. Sei $\varphi = (v_1, \ldots, v_n)$ ein Koordinatensystem von V und sei $\psi = (w_1, \ldots, w_m)$ ein Koordinatensystem von W. Die Darstellungsmatrix $M_{\varphi,\psi}(f)$ ist die eindeutig bestimmte Matrix $A = (a_{ij}) \in k^{m\times n}$, so daß für alle $1 \leq j \leq n$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \tag{A}$$

gilt.

Aufgabe. Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\varphi,\psi}(f)$ für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch $f(x, y, z) = (4x + y - 2z, -y + z)$ definiert ist bezüglich der Koordinatensysteme

$$\varphi = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \psi = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

Lösung. Wir sehen sofort, daß φ und ψ Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sind. Es gilt die Koeffizienten a_{ij} der Darstellungsmatrix zu bestimmen. Nennen wir $\varphi = (v_1, v_2, v_3)$ und $\psi = (w_1, w_2)$ und betrachten die Gleichung (A) für $j = 1, 2, 3$.

$j = 1$. Es gilt $f(v_1) = f(1, 0, 1) = (2, 1)$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} a_{i1} w_i &= a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A_{\bullet 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösen. Tun wir das, so erhalten wir $a_{11} = \frac{3}{2}$ und $a_{21} = \frac{1}{2}$.

$j = 2$. Es ist $f(v_2) = f(0, -1, 0) = (-1, 1)$, also müssen wir, mit dem gleichen Argument wie oben, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A_{\bullet 2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösen. Ersichtlich ist $A_{\bullet 2} = -e_2$ die Lösung dieses Gleichungssystems, also muß $a_{12} = 0$ und $a_{22} = -1$ sein.

$j = 3$. Wir erhalten $f(v_3) = f(2, 1, 0) = (9, -1)$, also löse

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A_{\bullet 3} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die Lösung $a_{13} = 4$ und $a_{23} = 5$. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich φ und ψ ist also

$$M_{\varphi,\psi}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Nun fällt uns auf, daß die drei zu lösenden Gleichungssysteme immer dieselbe Matrix involvieren. Tatsächlich ist das auch allgemein so, denn ersichtlich ist das Erfülltsein von (A) für alle j äquivalent zur Gleichung

$$(f(v_1) \mid \ldots \mid f(v_n)) = (w_1 \mid \ldots \mid w_m) \cdot A \tag{B}$$

wobei die Schreibweise $(w_1 \mid \ldots \mid w_m)$ bedeutet, daß wir die Spaltenvektoren $w_1, \ldots, w_m$ in dieser Reihenfolge in eine Matrix schreiben. Genauso sei $(f(v_1) \mid \ldots \mid f(v_n))$ definiert. Wir können also diese n linearen Gleichungssysteme, die in (B) enthalten sind, gleichzeitig lösen. Anders ausgedrückt ist A gegeben als die Matrix

$$A = (w_1 \mid \ldots \mid w_m)^{-1} \cdot (f(v_1) \mid \ldots \mid f(v_n))$$

In unserem Beispiel müssten wir also das Produkt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

berechnen.