Prof. K. Bongartz
H. Franzen
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

24. Mai 2012

Lineare Algebra I

Beispiel 2

Aufgabe. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $A(a)$ die Matrix

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2-1 \\ 0 & a+1 & 1-a^2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme den Rang von $A(a)$ in Abhängigkeit von a. Geben Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ mit Rang $A(a) = 3$ die inverse Matrix an.

Lösung.

1	-1	a^2-1	1	0	0	
0	$a+1$	$1-a^2$	0	1	0	
-1	1	0	0	0	1	addieren I zu III
1	-1	a^2-1	1	0	0	
0	$a+1$	$1-a^2$	0	1	0	
0	0	a^2-1	1	0	1	

Es ist also

$$\operatorname{Rang} A(a) = \begin{cases} 1, & a = -1; \\ 2, & a = 1; \\ 3, & a^2 - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Für das weitere Vorgehen setzen wir $a^2 - 1 \neq 0$ voraus.
Wir subtrahieren III von I und addieren III zu II.

1	-1	0	0	0	-1	
0	$a+1$	0	1	1	1	dividieren II durch $(a+1)$
0	0	a^2-1	1	0	1	und III durch (a^2-1)
1	-1	0	0	0	-1	
0	1	0	$\frac{1}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	
0	0	1	$\frac{1}{a^2-1}$	0	$\frac{1}{a^2-1}$	addieren II zu I
1	0	0	$\frac{1}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	$\frac{-a}{a+1}$	
0	1	0	$\frac{1}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	
0	0	1	$\frac{1}{a^2-1}$	0	$\frac{1}{a^2-1}$	fertig.

Es ist also

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2-1} \begin{pmatrix} a-1 & a-1 & -a(a-1) \\ a-1 & a-1 & a-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(wie eine Probe $AA^{-1} = E_3$ bestätigt).