Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 9
Abgabe bis 22.06.2011, 18 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $g : U \to V$, $f : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, dass

$$\dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker(f) + \dim \ker(g).$$

Hinweis: Betrachte die lineare Abbildung

$$\ker(f \circ g) \to \ker(f),\ x \mapsto g(x).$$

Aufgabe 2

Für welche Vektoren $b \in K^4$ besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

eine Lösung?

Aufgabe 3

Bezeichne mit $\mathrm{rk}(f)$ die Dimension des Bilds einer linearen Abbildung f. Seien nun U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Beweise oder widerlege:

a) $\mathrm{rk}(f) \geq \dim \ker(f)$.

b) $\mathrm{rk}(f + f) = \mathrm{rk}(f)$.

c) $\mathrm{rk}(g \circ f) \geq \max(\mathrm{rk}(g), \mathrm{rk}(f))$.

d) $\mathrm{rk}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rk}(g), \mathrm{rk}(f))$.

e) Ist g surjektiv, so ist $\mathrm{rk}(g \circ f) = \mathrm{rk}(f)$.

Aufgabe 4

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass $f \circ f = f$. Zeige:

a) $\mathrm{Bild}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

b) $\mathrm{Bild}(f) + \ker(f) = V$.

c) $\dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \ker(f) = \dim V$.