Übungen zur Linearen Algebra I — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 6 — Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 26.05.2011, 12 Uhr — Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Betrachte folgende Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimme alle unverlängerbaren linear unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{B}$.

c) Stelle für jede dieser Teilmengen $\mathcal{B}'$ die Vektoren aus $\mathcal{B}\backslash\mathcal{B}'$ als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}$ dar. Warum ist das möglich?

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und seien $a_1, \ldots, a_n \in K$. Betrachte

$$U := \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}.$$

Zeige, dass U ein Untervektorraum von K^n ist. Wie viele Elemente hat ein unverlängerbares linear unabhängiges Tupel mit Vektoren aus U?

Aufgabe 3

a) Sei $a \in \mathbb{Q}$. Betrachte im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V := \mathbb{Q}^3$ die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$. Für welche $a \in \mathbb{Q}$ ist das Tupel $(v_1, v_2, v_3) \in V^3$ linear unabhängig?

b) Bestimme die Dimension von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ für alle $a \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4

Bestimme die Dimensionen der folgenden Untervektorräume V des Vektorraums $\mathbb{R}^4$:

a) $V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

b) $V = V_1 + V_2$ mit $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $V_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

c) $V = V_1 \cap V_2$ mit $V_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ und $V_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$